

Equivalência de Conjuntos - Números Cardinais

1. Equivalência entre conjuntos.

Dois conjuntos são chamados EQUIVALENTES se seus elementos podem ser postos em correspondência biunívoca. Mais precisamente:

Definição 1: Diz-se que o conjunto A é equivalente ao conjunto B , e escreve-se $A \sim B$, se existe uma aplicação bijetora (isto é, injetora e sobrejetora)

$$f: A \rightarrow B$$

Assim, por exemplo, o conjunto dos dedos de um ser humano normal é equivalente ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Note que se $A \sim B$ então existirá $f^{-1}: B \rightarrow A$ que também é bijetora (complete os detalhes!) e assim também $B \sim A$. Diz-se por isto, simplesmente, que A e B são equivalentes.

Teorema 1. Em qualquer classe de conjuntos, a relação " $\sim$ " é uma relação de equivalência.

Prova: Como exercício

Exemplos

1. Seja A o conjunto dos inteiros positivos pares e B o conjunto dos inteiros positivos. A aplicação $x \mapsto x$ não satisfaz a condição desejada mas isto não mostra que os conjuntos A e B não são equivalentes. Precisamos achar outra aplicação $f: A \rightarrow B$ que seja bijetora e é fácil ver que $x \mapsto x/2$ satisfaz esta condição e assim $A \sim B$.

2. Considere os intervalos fechados $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ e a aplicação $f: A \rightarrow B$ tal que

Teorema 2. (Teorema de Bernstein): Se $A \sim B_1$, $B_1 \subset B$ e $B \sim A_1$, $A_1 \subset A$, então $A \sim B$.

Prova: Como $A \sim B_1$, existe bijeção $f: A \rightarrow B_1$, e esta estabelece bijeção entre $A_1 \subset A$ e um subconjunto $B_2 = f(A_1) \subset B_1$. Agora, como $B \sim A_1$ e $B_2 \sim A_1$, segue que $B \sim B_2$. Mas $B \supset B_1 \supset B_2$ de modo que, pelo Lema 1, $B \sim B_1$. Por outro lado $A \sim B_1$ e assim $A \sim B$ ■

Causa certa estranheza no início a observação mais detalhada do exemplo 1, onde B é o conjunto dos inteiros positivos e A é o subconjunto (próprio) dos pares positivos, quando se mostrou que $A \sim B$.

Definição 2. Definiremos aqui que um conjunto é FINITO se for vazio ou se for equivalente a um conjunto da forma $\{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$; Caso contrário, será chamado de INFINITO.

O exemplo 1 mostra que um conjunto infinito pode ser equivalente a um ^{de seus} subconjuntos próprios. Deixamos como exercício a verificação de que nenhum conjunto finito tem esta propriedade.

A definição 2 acima dá as definições chamadas "ordinárias" para os conceitos de "conjunto finito" e "conj. infinito".

Além delas existem as definições de Dedekind:

Definição 3. Um conjunto é Infinito segundo Dedekind se tem um subconjunto próprio que lhe seja equivalente. Caso contrário, será chamado de finito segundo Dedekind.

Note que os conceitos se apresentam na ordem inversa e que, em ambos os casos, o 2º conceito é definido pela negativa daquele apresentado em 1º lugar.