

1º NPC , em 1/4/1971.

1. DEFINA: a) SUPREMO DE UM CONJUNTO NÃO VAZIO
b) CORPO ORDENADO COMPLETO
2. DEFINA: a) SEQUÊNCIA DE CAUCHY
b) ESPAÇO MÉTRICO COMPLETO.
3. DEMONSTRE , com todos os detalhes , que uma sequência não pode ter dois limites distintos.
4. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sequências em $\mathbb{R}^K$, com $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Prove que $\lim (x_n + y_n) = x + y$.
5. Prove que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos reais , sendo decrescente e limitada inferiormente , será convergente .
6. Sejam (x_n) , (y_n) e (z_n) três sequências de Cauchy num espaço métrico M e forme-se no produto cartesiano $M^3 = M \times M \times M$ uma sequência (p_n) tal que $p_n = (x_n, y_n, z_n)$. Use-se em M^3 a métrica

$$d_1(p_1, p_2) = \sqrt{(d(x_1, x_2))^2 + (d(y_1, y_2))^2 + (d(z_1, z_2))^2}$$

onde $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

- a) Mostre então que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy .
- b) Que se pode dizer de M^3 se M for um espaço completo?

Duração da prova: 2 horas