

EXAME FINAL: PROVA ESCRITA, 2^a Época.

CADEIRA: ANÁLISE I

QUESTÕES PROPOSTAS

- 1) Seja $C(X)$ o conjunto das funções contínuas em X com valores reais. Seja
$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$
Se X é compacto, mostre que $C(X)$ é um espaço métrico completo.
- 2) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C(X)$, convergente no sentido da métrica acima definida, onde X é um compacto. Interprete esta convergência em termos de convergência uniforme. Justifique.
- 3) Que se pode dizer sobre a continuidade do limite $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ da sequência acima, se X é compacto? e se X não é compacto? Justifique.
- 4) Prove que a função $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(x, y) \mapsto x + y$ é contínua. Use este resultado para concluir que se $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, então $x \mapsto f(x) + g(x)$ é também contínua.
- 5) Seja $\text{fr}(A) = \overline{A} \cap \left(\bigcap A \right)$. Mostre que $\text{fr}(\text{fr}(A)) \subset \text{fr}(A)$.
- 6) Seja $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de intervalos fechados limitados com $I_{n+1} \subset I_n$ e com $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{comprimento de } I_n) = 0$. Mostre que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ contém um e só um

ponto,

- 7) Que se passa com a afirmação acima
- a) se os intervalos não são fechados?
 - b) " " " " " limitados?
 - c) se $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{comprimento de } I_n) \neq 0$?
- Justifique cada uma das respostas.

João Pessoa, 18/8/1971.
João Cleobaldo Chianca.