

Algebra I - Exame Final - 17/12/75.

- 0,5 1(a) Escreva como produto de grupos do tipo $\mathbb{Z}_p$ um grupo abeliano cujos coefs de ligação são $4e36$
- 0,5 (b) Quantos grupos abelianos existem de mesma ordem que o grupo anterior?
- 0,5 2(a) Enuncie o(s) teorema(s) de Sylow
- 1,0 (b) Mostre que um grupo de ordem ~~12~~ 12 não pode ser simples.
- 1,0 3(a) Se $H \leq G, K \leq G$, mostre que $G = H \times K$ (interno) $\Leftrightarrow$
- (i) $G = H \vee K$; (ii) $hk = kh \forall h \in H \forall k \in K$; (iii) $H \cap K = \{e\}$
- 0,5 (b) Mostre que então $H \triangleleft G$ e mais $G/H \cong K$
- 0,5 (c) Se $H \triangleleft G, K \triangleleft G, H \cap K = \{e\}$ e $H \vee K = G$, então $G = H \times K$
- 0,5 4(a) - Enuncie e demonstre a condição da cadeia ascendente num PID
- 1,0 (b) O ideal $\langle p \rangle$ num PID é maximal $\Leftrightarrow p$ é um irreduzível.
- 0,5 (c) Dê um exemplo de um UFD que não é PID.
- 1,0 (d) Dê exemplo de um Domínio que não é U.F.D.
- 0,5 5(a) Defina domínio Euclidiano e mostre que todo Dom. Euclidiano é PID
- 0,5 (b) Mostre que se F é corpo então $F[x]$ é euclidiano
- 0,5 (c) Defina m.d.c de dois elementos num domínio e mostre que D euclidiano $\Rightarrow$ m.d.c. de 2 elementos sempre existe e é expresso como "comb. linear" dos elementos dados
- 0,5 6(a) Se $\alpha \in E \supset F$ é algébrico / F e se $\beta \in F(\alpha)$ então prove que β é algébrico / F .
(Defina todos os termos, se que necessitar D.D.)
- 0,5 (b) Mostre que se E é uma extensão finita

de F , então E será extensão algébrica de F .

0,5 7(a) Fale sobre construtibilidade (a régua e compasso).

0,5 (b) Mostre que o conjunto K dos números ^{reais} construtíveis contém propriamente $\mathbb{Q}$.

(c) Mostre que ~~$K = \mathbb{Q}(\alpha)$~~ se $p \in K$ então $\exists$

0,5 existem elementos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de grau 2 tais que $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

TOTAL 11,5

Feliz Natal
Chinês.