

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
2ª PROVA DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS
ALUNO(A):

RESOLVA APENAS 04 QUESTÕES

1ª QUESTÃO

- (a) Dê a definição de grupo
- (b) Enuncie o Teorema de Lagrange
- (c) Dê a definição de homomorfismo de grupos
- (d) Enuncie um Teorema sobre homomorfismo.

2ª QUESTÃO. Prove que um grupo G não pode ter um subgrupo H com $|H| = n - 1$, onde $|G| = n > 2$.

3ª QUESTÃO. Seja G um grupo de ordem n . Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{mdc}(n, k) = 1$.

- (a) Prove que todo elemento $g \in G$ pode ser escrito na forma $g = x^k$, para algum $x \in G$.
- (b) Prove que $f : G \rightarrow G$ dada por $f(x) = x^k$ é um automorfismo, se G é abeliano.

4ª QUESTÃO. Seja H um subgrupo de S_n tal que $H \not\subset A_n$. Mostre que a metade dos elementos de H são permutações pares.

5ª QUESTÃO. Sejam H e K dois subgrupos normais de um grupo G tais que $H \cap K = \{e\}$. Mostre $hk = kh$, $\forall h \in H$ e $k \in K$.

6ª QUESTÃO. Sejam k um corpo e $G = GL_n(k)$ o grupo das matrizes invertíveis. Seja $SL_n(k) = \{A \in G ; \det(A) = 1\}$. Mostre que $SL_n(k)$ é um subgrupo normal de G e $G/SL_n(k) \cong k^*$.

(Sugestão : Use $\det : G \mapsto k^*$
 $A \mapsto \det(A)$)