

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1ª Prova de Espaços Métricos - Período 94.1 - Prof. A. Maciel

Aluno(a): _____ Mat.: _____

1ª Questão: Mostre que em um espaço vetorial E uma métrica d é oriunda de uma norma se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $d(x+z, y+z) = d(x, y), \quad \forall x, y \text{ e } z \in E.$
- ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y), \quad \forall x \text{ e } y \in E \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

2ª Questão: Seja V um espaço vetorial com produto interno e $T:V \rightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que as condições abaixo são equivalentes:

- i) T é uma imersão isométrica;
- ii) $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in V$;
- iii) $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para quaisquer x e y em V .

Mostre também que se V tem dimensão finita e T satisfaz qualquer das condições acima (e portanto todas) então T é uma isometria.

3ª Questão: Dados os espaços métricos (M, ρ) e (N, δ) seja $U = M \times N$. Considere em $U \times U$ a função dada por $\phi[(x, y), (x', y')] = \rho(x, x') + \delta(y, y')$. Mostre que ϕ é uma métrica.

4ª Questão: Seja M um espaço métrico, com métrica d . Mostre que a métrica é uma contração fraca de $M \times M$ em $\mathbb{R}$, quando consideramos em $M \times M$ a métrica da questão 3. Conclua que a métrica é uma função contínua.

5ª Questão: Defina homeomorfismo entre espaços métricos. Dê exemplo de dois espaços métricos homeomorfos, sendo um limitado e outro não.
