

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primeira Prova de Cálculo Avançado - Período 95.1 - Prof. Aldo

Aluno: _____ Mat.: _____

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

- (a) Mostre que f não é contínua em $(0, 0)$.
(b) Mostre que existe $f'((0, 0); v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

2. Sejam $u = f(x, y)$ uma função definida em $\mathbb{R}^2$ e possuindo derivadas parciais contínuas, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ com $r > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Mostre que vale a seguinte identidade:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

3. Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ se $x^2 + y^2 \neq 0$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre que f possui primeiras derivadas parciais em $(0, 0)$ mas estas não são aí contínuas. Prove que f é diferenciável em $(0, 0)$.

4. Calcule a derivada direcional da função $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + z^2$ no ponto $(1, 2, 3)$ na direção da reta que passa nos pontos $P=(1, 2, 3)$ e $Q=(3, 5, 2)$ e no sentido de P para Q .

5. Encontre todos os pontos (x, y) e todas as direções para as quais a derivada direcional da função $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ atinge seu máximo valor, se (x, y) está restriti à circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

6. Seja $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$ e $f(0, 0) = 0$. Mostre que :

- (a) Para cada x fixado, $f(x, y)$ é contínua em y .
(b) Para cada y fixado, $f(x, y)$ é contínua em x .
(c) f não é contínua em $(0, 0)$.
(d) As derivadas parciais $\partial f / \partial x$ e $\partial f / \partial y$ existem mas não são contínuas em $(0, 0)$.