

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Segunda Prova de Álgebra Linear
Prof. Aldo Maciel - Período 98.1 - 21/09/98

Aluno(a)._____Mat._____

Questão 1: Para cada par de vetores $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$ em $\mathbb{R}^2$, ponha

$$[u, v] = 2xx' - xy' - xy' + 2yy'.$$

Prove que isto define um produto interno no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Questão 2 : Seja $\langle ., . \rangle$ um produto interno no espaço vetorial F . Dado um isomorfismo $A : E \rightarrow F$ ponha

$$[u, v] = \langle Au, Av \rangle, \text{ para todo } u \text{ e } v \text{ de } E.$$

Prove que $[.,.]$ define um produto interno em E .

Questão 3: Seja E um espaço vetorial com um produto interno. Fixados dois vetores a e b de E defina $A : E \rightarrow E$ por

$$Av = \langle v, a \rangle b.$$

Mostre que A é linear e determine A^* .

Questão 4 : Se v e w são respectivamente auto-vetores de A e A^* , correspondente a auto-valores $\lambda \neq \mu$, prove que v e w são ortogonais.

Questão 5 : Dada a transformação linear $A : E \rightarrow F$, entre espaços vetoriais de dimensão finita munidos de produto interno, verifique que

$$\mathcal{N}(A^*) = \text{Im}(A)^\perp.$$