

ESPECIALIZAÇÃO EM ANÁLISE

MEDIDA E INTEGRAÇÃO - 1ª PROVA

1. Enumere:

- a) o Teorema de Fatoú;
- b) o Teorema da Convergência Monótona;
- c) o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

2. Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-numerável e

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in E \\ -x, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

f é mensurável?

3. a) Se $A \subset \mathbb{R}$ é tal que $m(A) = 0$ então A é limitado?

b) Se $A \subset \mathbb{R}$ é tal que $0 < m(A) < +\infty$ então A é limitado?

4. Se f é mensurável, $m(E) < +\infty$ e $a \leq f \leq b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, então f é integrável em E e $a m(E) \leq \int_E f dx \leq b m(E)$.

5. Seja $f_n = n \chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$ e $f = 0$. Mostre que

$$\int f dx \neq \lim \int f_n dx.$$

A sequência (f_n) converge uniformemente para f ?

O Teorema de Fatoú se aplica?

O Teorema da Convergência Monótona se aplica?

6. Seja $f \geq 0$ uma função real estendida e seja (E_n) uma sequência de conjuntos mensuráveis, dois a dois disjuntos. Então

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f dx.$$

7. (Teorema de Convergência Limitada de Weierstrass)
 Seja E um conjunto mensurável com $m(E) < +\infty$ e
 (f_n) uma sequência de funções reais mensuráveis tal que
 $|f_n| \leq M$ para todo n e $f_n \xrightarrow{q.s.} f$. Então

$$f \text{ é integrável em } E \text{ e } \int_E f dx = \lim \int_E f_n dx.$$

_____ //