

MEDIDA E INTEGRAÇÃO

- Referências:
- The Elements of Integration, R. G. BARTLE
 - Introductory Real Analysis, KOLODOGOROV / FOMIN
 - Real Analysis, H. L. ROYDEN
 - Measure Theory and Integration, G. de BARRA

1.0. Conjuntos de medida infinita e funções tomando valores ~~reais~~ $+\infty$ ou $-\infty$ ocorrem de maneira natural. Para evitar restrições inconvenientes e desnecessárias, introduzimos o conjunto dos números reais estendidos, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, onde reservaremos os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ ao conjunto dos números reais, com as convenções:

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty;$$

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty;$$

$$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty;$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty, \quad x > 0;$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty, \quad x < 0;$$

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0.$$

Note que não definiremos $(+\infty) + (-\infty)$ ou $(-\infty) + (+\infty)$, nem quocientes com denominador $\pm\infty$. Estas convenções, $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ é especial para a teoria da medida e integrações, e com elas, funções de medida, com valores infinitos, podem ser recordadas de modo conveniente.

4.1. OS ESPAÇOS L^p

Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida.

Definição 1: Duas funções $\mathcal{X}$ -mensuráveis, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, são μ -equivalentes se $f = g$ μ -q.s. Denotamos a classe de

μ -equivalência de f por $[f]$, isto é,

$$[f] = \{g: X \rightarrow \mathbb{R}; g \text{ é mensurável e } g = f \text{ } \mu\text{-q.s.}\}.$$

Por exemplo, $[0] = \{g: X \rightarrow \mathbb{R}; g \text{ é mensurável e } g = 0 \text{ q.s.}\}.$

Definição 2: Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p(X) = L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ consiste de todas as classes de μ -equivalência de funções $\mathcal{X}$ -mensuráveis, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, para as quais $\int |f|^p d\mu < +\infty$.

Se $[f], [g] \in L^p(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } \alpha[f] = [\alpha f].$$

Teorema 1: $L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Prova: Sejam $[f], [g] \in L^p(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $\int |f|^p d\mu < +\infty$

e $\int |g|^p d\mu < +\infty$. Temos $\int |\alpha f|^p d\mu = |\alpha|^p \int |f|^p d\mu < +\infty$,

donde $\alpha[f] = [\alpha f] \in L^p(X)$.