

INTRODUÇÃO À ANÁLISE REAL / 98.1 / 1ª PROVA

1. (a) Defina supremo e ínfimo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$;
(b) Defina sequência (em $\mathbb{R}$) convergente;
(c) Defina sequência (em $\mathbb{R}$) de CAUCHY;
(d) Enuncie o Teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS.
2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado. Dado $c > 0$, seja $c.A = \{cx; x \in A\}$.
Prove que $c.A$ é limitado, $\sup(c.A) = c \cdot \sup A$ e $\inf(c.A) = c \cdot \inf A$.
Enuncie um resultado análogo para $c < 0$.
3. Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que existe uma constante κ , $0 < \kappa < 1$, satisfazendo $|x_{n+1}| \leq \kappa |x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\lim x_n = 0$.
4. Dado $a \in \mathbb{R}$, com $|a| < 1$, seja $x_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$. Prove:
(a) $(1 + a + \dots + a^n)(1 - a) = 1 - a^{n+1}$, por indução;
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1-a}$.
5. Ponha $x_1 = 1$ e defina $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Mostre que a sequência (x_n) , assim obtida, é crescente e limitada. Determine $a = \lim x_n$.