

GEOMETRIA DIFERENCIAL - 2ª PROVA - 12/12/95

1. Dê a classificação dos pontos de uma superfície quanto à curvatura gaussiana e curvaturas principais.
2. Seja $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0)$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular plana e V um vetor fixo tal que $\alpha'(u) \times V \neq 0$, $\forall u \in I$. Suponha α injectiva. Considere S o cilindro gerado parametrizado por

$$X(u, v) = \alpha(u) + vV, \quad u \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Mostre que os pontos de S são parabolóides ou planares.

3. Cubra o hipерболоide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, menos uma hipérbole, com uma única vizinhança coordenada. Desenhe as curvas coordenadas.

4. Considere a superfície S parametrizada por

$$X(u, v) = (u, v, u^2 + v^3), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que S é elíptica onde $v > 0$, hiperbólica onde $v < 0$ e parabolóide para $v = 0$.

5. Prove que a soma das curvaturas normais em um ponto de uma superfície ao longo de qualquer par de direções ortogonais é constante.

6. Seja S uma superfície de revolução parametrizada por

$$X(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, u), \quad u \in I \subset \mathbb{R}, \quad f(u) > 0, \quad 0 < v < 2\pi$$

Mostre que todos os pontos de S são parabolóides se, e somente se, S é um cilindro exceto para $(f \equiv a = \text{const.})$ ou um cone $(f(u) = au + b; \quad a = \text{const.} \neq 0, \quad b = \text{const.})$.