

1. Resolver:

$$a. \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & ; \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \cos x \\ u_t(x, 0) = u_1(x) = 1 \end{cases}$$

Qual a deflexão do ponto $x_0 = \pi$ no instante $t_0 = \pi/2$?
 Determine (e esboce gráficos) o domínio de dependência do ponto $(\pi, \pi/2)$ e o domínio de influência do ponto $(\pi, 0)$.

$$b. \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(x, 0) = \sin x \\ u_t(x, 0) = \cos x \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 4x \\ u(x, 0) = x^2 \\ u_t(x, 0) = 1 \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \sin 5x \\ u_t(x, 0) = u_1(x) = \cos 3x \end{cases}$$

$$e. \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x^2 \\ u(x, 0) = x \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$f. \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = e^{-x} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

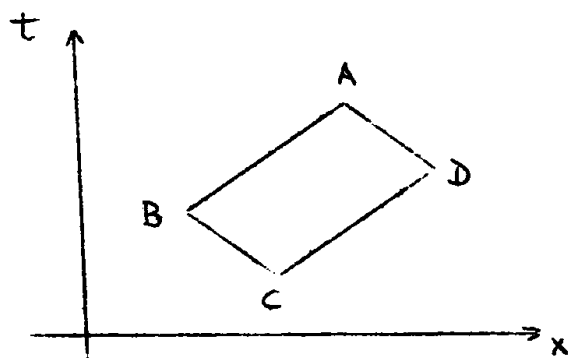
$$g. \text{ Idem, sendo } \begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) = A \sin \omega x \\ u_t(x, 0) = u_1(x) = B \cos \theta x \end{cases}$$

$$h. \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 1 \\ u(x, 0) = \sin \omega x \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$i. \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 4x + t \\ u(x, 0) = u_0(x) = 0 \\ u_t(x, 0) = u_1(x) = \cosh bx \end{cases}$$

2. Seja $u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$, onde F e G são funções arbitrárias de classe C^2 , a solução da equação diferencial parcial $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$.

Verifique que, para qualquer paralelogramo $ABCD$ no plano xt limitado por quatro retas características, as somas dos valores de u nos vértices opostos são iguais, isto é, $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$.



3. Considere o problema
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,t) = f(x), u_t(x,t) = g(x) \text{ sobre } C \end{cases}$$
 sobre

C , onde C é a característica $t = x/a$.

a. Mostrar que nenhuma solução da forma $u(x,t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$ existe, a não ser que as funções f e g dadas satisfaçam a relação $g(x) = \frac{a f'(x)}{2} + \alpha$, onde α é constante.

b. Neste caso, mostrar que existem infinitas soluções da forma $u(x,t) = \varphi(x-at) + f\left(\frac{x+at}{2}\right) - \varphi(0)$, sendo φ duas vezes diferenciável e tal que $\varphi'(0) = -\frac{\alpha}{a}$.

4. Em cada item abaixo, verifique que a função dada é solução da equação diferencial parcial correspondente:

a. $z = x^3 f(y/x)$, arbitrária; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z$

b. $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$; $4z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

c. $z = ax e^y + \frac{1}{2} a^2 e^{2y} + b$; $z_y = x z_x + (z_x)^2$

d. $u(x,t) = f(t) + e^x g(t)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$

e. $z(x,y) = \psi(x^2 + y^2)$, $y z_x - x z_y = 0$

f. $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = a^2$ (solução na forma implícita)
 $y z_x - x z_y = 0$

g. $z = \phi(y) \log x + \psi(y) + \frac{1}{x}$; $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$

h. $u = e^{-w^2 c^2 t} \sin wx$, $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (eq. do calor)

5. Verificar que $u(x,y) = a \log(x^2 + y^2) + b$ é solução da equação de Laplace $\Delta u = 0$, e determinar a e b de modo que $u = 0$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e $u = 3$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

_____ // _____