

Considere as funções $\phi_1, \phi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi_1(t) = t^3$ e $\phi_2(t) = |t|^3$. Mostre que
 (a) ϕ_1 e ϕ_2 são linearmente independentes; (b) $W[\phi_1, \phi_2](t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(FÓRMULA DE ABEL-LIOUVILLE) Sejam $\phi_1, \phi_2: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ soluções da equação $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$. Considere $W(t) = W[\phi_1, \phi_2](t)$, $t \in (a, b)$.

Dado $t_0 \in (a, b)$, mostre que $W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}$

CONSEQUÊNCIA. Sejam $\phi_1, \phi_2: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ soluções de $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$. Então, ocorre uma das alternativas: (i) $W(t) \equiv 0$ ou (ii) $W(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

Mostre que $\phi_1(t) \equiv 0$ e $\phi_2(t) = t^2 \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, são soluções do P.V.I.

$$t^2 \ddot{x} - 4t \dot{x} + (t^2 + 6)x = 0, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

4. (a) Mostre que as funções $\phi_1(t) = t^2$ e $\phi_2(t) = t^3$, $t \in (-1, 1)$, são L.I.

(b) $\phi_1(t) = t^2$ e $\phi_2(t) = t^3$ são soluções de alguma equação do tipo $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ no intervalo $(-1, 1)$?

(c) E se considerarmos $\psi_1(t) = t^2$ e $\psi_2(t) = t^3$ para $t \in (0, 1)$?

Sejam $\phi_1, \phi_2: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ soluções L.I. de $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$, com $\phi_1(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$. Mostre que $\frac{d}{dt} \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) = \frac{W[\phi_1, \phi_2]}{\phi_1^2}$. Use a fórmula de

ABEL-LIOUVILLE para obter uma expressão para ϕ_2 .

Se p e q são constantes positivas e $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, mostre que, para quaisquer soluções $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ de $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t)$, tem-se $\lim_{t \rightarrow +\infty} [\phi_1(t) - \phi_2(t)] = 0$.

7 Mostre que as funções $\phi_1(t) = t$ e $\phi_2(t) = te^t$, para $t \in \mathbb{R}$, são soluções L.I. de $t^2 \ddot{x} - t(t+2)\dot{x} + (t+2)x = 0$. Calcule $W[\phi_1, \phi_2](0)$.