

1. (a) Defina $w_x(f) = \text{oscilação}$ de uma função f num conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que uma função (limitada) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável no retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de R tal que $\sum_S w_S(f) \cdot v(S) < \varepsilon$, (soma sobre todos os subretângulos de P).

(c) Defina $w(f; x) = \text{oscilação}$ de uma função f num ponto x .

2. Dê exemplos de duas funções limitadas $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tais que o conjunto $X = \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ tenha medida nula, f seja integrável e g não seja.

(Valor Médio / Integrar) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\int_R f = f(c) \cdot v(R)$.

Sugestão. Comece com $m \cdot v(R) \leq \int_R f \leq M \cdot v(R)$, onde $m = \inf_R f$ e $M = \sup_R f$. Use os Teoremas abaixo:

(i) (Weierstrass) Toda função $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua num conjunto compacto K assume máximo e mínimo em K , ou seja, existem $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in K$.

(ii) (Valor Intermediário) Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num conjunto conexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Se $a, b \in X$ e $d \in \mathbb{R}$ são tais que $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.

4. Sejam $f: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (limitada) integrável e $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b] \supset f(\mathbb{R})$. Prove que $g \circ f: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.