

CÁLCULO AVANÇADO / 99.2 / (Final)

1. (a) Defina $w_x(f) =$ oscilações de uma função f num conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$.
- (b) Mostre que uma função (limitada) $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável no retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de R tal que $\sum_S w_S(f) \cdot v(S) < \varepsilon$; (soma sobre todos os subretângulos S de P).
2. Seja $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função (limitada) integrável no retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que $m \cdot v(R) \leq \int_R f \leq M \cdot v(R)$, onde $m = \inf_R f$ e $M = \sup_R f$.
3. Sejam $f, g: R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções (limitadas) integráveis no retângulo R . Mostre que o produto $f \cdot g$ é integrável.
-