

1. De modo breve, descreva: (a) soma inferior, soma superior; (b) integral inferior, integral superior; (c) a integral. Apresente algum (ou alguns) exemplo (ou exemplos) (d) Enuncie algum Teorema de Caracterização das funções integráveis.
2. Sejam $f, g: R \rightarrow \mathbb{R}$ funções (limitadas) integráveis no retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$.
 Mostre que (a) se $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$, então $\int_R f \geq 0$;
 (b) se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in R$, então $\int_R f \leq \int_R g$.
3. Sejam $f: R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função (limitada) integrável no retângulo R e $c \in \mathbb{R}$. Mostre que a função $c \cdot f: R \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$, é integrável e $\int_R c \cdot f = c \cdot \int_R f$.
Sugestão. Sejam nos casos $c \geq 0$ e $c < 0$.
4. Dê exemplo de uma função (limitada) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável que seja descontínua num conjunto infinito. Justifique o exemplo dado.
5. Mostre que o conjunto $X = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; x \text{ é irracional}\}$ não é J -mensurável.
6. (a) Sejam $f, g: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Mostre que $D_{f \cdot g} \subset D_f \cup D_g$, onde $D_{f \cdot g}$, D_f e D_g são os conjuntos dos pontos de descontinuidade de $f \cdot g$, f e g , respectivamente.
 (b) Sejam $f, g: R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções (limitadas) integráveis no retângulo R . Mostre que o produto $f \cdot g$ é integrável.

OBSERVAÇÃO. A questão 1. é obrigatória. Entre as questões de 2. a 6., resolva três delas.
