

ANÁLISE NO $\mathbb{R}^N$

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2026.2

1. **(1,0)** Um subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ é dito **compacto** se for fechado e limitado. Mostre que $C \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda sequência (x_k) de pontos de C admite uma subsequência convergente para um ponto de C .
2. **(1,5)** Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Mostre que f é contínua em K se, e somente se, seu gráfico $G_f := \{(x, f(x)) : x \in K\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é compacto.
3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação.
 - a) **(0,5)** Dê a definição de f ser diferenciável num ponto $x_0 \in U$;
 - b) **(0,5)** Mostre que se f é diferenciável em $x_0 \in U$ então vale

$$f'(x_0).v = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

em que $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ denota a derivada direcional de f no ponto x_0 na direção de v ;

- c) **(1,0)** Mostre que se f é diferenciável em $x_0 \in U$ então f é contínua neste ponto;
 - d) **(0,5)** Se $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$, mostre que a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^2$ é diferenciável em todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e calcule $f'(x).v$ para $x, v \in \mathbb{R}^n$.
 - e) **(0,5)** A função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|x\|$ é diferenciável na origem? (Justifique)
4. a) **(0,5)** Enuncie precisamente o Teorema da Função Implícita;
 - b) **(1,0)** Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , com $f(3, -1, 2) = 0$ e a matriz jacobiana de f em $(3, -1, 2)$ é

$$J_f(3, -1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que existe uma função $g : V \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g = (g_1, g_2)$, de classe C^1 definida num aberto V de $\mathbb{R}$ tal que $g(3) = (-1, 2)$ e $f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$ para todo $x \in V$;

- c) **(0,5)** Determine $g'(3)$.
5. **(1,5)** Seja $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Justifique que cada uma das integrais abaixo estão bem definidas e mostre que

$$\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} \cos y \cos x . g(x) dx \right) dy = \int_{-1}^0 \sin(1+x) \cos x . g(x) dx + \int_0^1 \sin(1-x) \cos x . g(x) dx.$$

6. **(1.0)** Calcule a integral

$$I = \int_D (x+y)e^{x-y} dx dy,$$

onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 2, 0 \leq x-y \leq 2\}$. Justifique cuidadosamente as hipóteses do teorema usado.