

ANÁLISE NO $\mathbb{R}^N$

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2026.1

1. **(1.5)** Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de X se para todo $\delta > 0$ tem-se $B_\delta(a) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, ou seja, $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$. Mostre que todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}^n$ possui um ponto de acumulação. Dê exemplo de um subconjunto infinito de $\mathbb{R}^n$ que não possui ponto de acumulação.
2. **(1.0)** Mostre que toda função contínua definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.
3. a) **(1,0)** Dê o conceito de difeomorfismo local e mostre que todo difeomorfismo local é uma *aplicação aberta*, isto é, leva abertos em abertos;
b) **(1,0)** Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 tal que a matriz jacobiana de f em cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é invertível. Mostre que se f for uma *aplicação fechada*, isto é, leva fechados em fechados, então f é sobrejetora;
c) **(1,0)** Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x - y\| \leq C\|f(x) - f(y)\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Prove que f é um difeomorfismo de classe C^1 .

4. a) **(0,5)** Enuncie o Teorema da Função Implícita;
b) **(1.0)** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(1) = 1$ e defina

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2f(xy) = f(x)^2 + f(y)\}.$$

Mostre que se $f'(1) \neq 0$, existe $r > 0$ tal que $S \cap B_r((1, 1))$ é gráfico de uma função $y = \varphi(x)$ de classe C^1 .

5. **(1.5)** Seja $g : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional;} \\ 2y, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Mostre que a integral iterada $\int_0^1 \left[\int_0^1 g(x, y) dy \right] dx$ está bem definida e calcule-a. Por outro lado, mostre que g não é integrável em $[0, 1] \times [0, 1]$.

6. a) **(0.5)** Enuncie precisamente o Teorema da Mudança de Variáveis para integrais múltiplas;
b) **(1.0)** Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Mostre que se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto J -mensurável e compacto, então

$$\text{vol}(T(X)) = |\det [T]| \cdot \text{vol}(X), \quad ([T] \text{ é a matriz que representa } T).$$