

ANÁLISE NA RETA

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2026.2

1. **(1,5)** Seja (a_n) uma sequência em $\mathbb{R}$.
 - a) Defina precisamente o significado de (a_n) ser limitada e o conceito de supremo do conjunto $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.
 - b) Defina precisamente o significado de (a_n) ser monótona crescente e o conceito de convergência dessa sequência.
 - c) Mostre que se (a_n) é crescente e limitada então converge para o supremo de $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.
2. **(1,5)** Considere as sentenças:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty. \quad \text{b)} \text{ A série } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.} \quad \text{c)} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n = 0.$$

Mostre que **b)** e **c)** são equivalentes e que **a)** $\Rightarrow$ **b)**, mas que não vale **b)** $\Rightarrow$ **a)**.

3. **(2,0)** A distância entre dois conjuntos não vazios $A, B \subset \mathbb{R}$ pode ser definida por

$$d(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\}.$$

Sendo A e B conjuntos limitados, disjuntos e não vazios, mostre que se $d(A, B) = 0$ então existe $x \in \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$, onde $\text{Fr}(A)$ e $\text{Fr}(B)$ são as respectivas fronteiras de A e de B .

4. **a) (0,5)** Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto tal que, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, a interseção $X \cap K$ é compacta, então mostre que X é fechado.
b) (1,0) Seja $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no compacto $K \subset \mathbb{R}$. Mostre que $L = g(K)$, a imagem de K por g , é compacta.
c) (1,0) Com as hipóteses e notações de b), mostre que $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, a composta $f \circ g : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.
5. **a) (0,5)** Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $a \in \mathbb{R}$ é contínua em a .
b) (1,0) Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I . Se o conjunto $f'(I)$ é limitado, mostre que f é lipschitziana: existe $C > 0$ constante tal que $x, y \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$.
6. **(1,0)** Prove o *Teorema do Valor Médio para integrais*: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.