

ANÁLISE NA RETA

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2026.1

1. Seja (x_n) uma sequência de números reais e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então:
 - a) **(0,5)** Dê o significado preciso de (x_n) ser uma sequência de Cauchy.
 - b) **(1,0)** Suponha que f é linear, isto é, tem-se $f(x) + \alpha f(y) = f(x + \alpha y)$ para todos $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$, e suponha ainda que existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se (x_n) é de Cauchy, então $(f(x_n))$ também é de Cauchy.
2. **(1,5)** Mostre que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, com $a_n \geq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ também converge [Dica: use a desigualdade $2xy \leq x^2 + y^2$, válida para todos $x, y \in \mathbb{R}$].
3. **(2,0)** A distância de um ponto $x \in \mathbb{R}$ a um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$ pode ser definida por

$$d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}.$$

Mostre que $d(x, A) = 0$ se, e somente se $x \in \overline{A}$.

4. Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto.
 - a) **(1,0)** Mostre que a imagem $f(K)$ pela função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.
 - b) **(1,0)** Conclua de a) que existem $a, b \in K$ tais que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in K$.
5. **(1,5)** Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável e satisfaz $f(tx) = t^n f(x)$ para todos $t, x \in \mathbb{R}$, então mostre que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
6. **(1,5)** Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Mostre que $\int_a^b f(x)dx = 0$ se, e somente se, tem-se $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.