

ÁLGEBRA LINEAR

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2025.1

1. a) (1,0) Sejam V um espaço vetorial real e $u, v, w \in V$. Mostre que se $\{u, v, w\}$ é um conjunto LI (linearmente independente), então $\{u + v - 2w, u - v - w, u + w\}$ também é um conjunto LI.
- b) (1,0) Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\alpha = \{(1, 3), (2, -4)\}$ uma base de V . Se a matriz de mudança de base $[I]_{\beta}^{\alpha}$ é dada por

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix},$$

determine a base β .

2. (1,5) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo F . Demonstrar que V e W são isomorfos se, e somente se, $\dim V = \dim W$.
3. Sejam V um espaço vetorial de dimensão 6 e $T : V \rightarrow V$ um operador linear cujos autovalores distintos são λ_1 e λ_2 . Sejam V_{λ_1} e V_{λ_2} os auto-espaços associados aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente. Se $\dim V_{\lambda_1} = 3$ e $\dim V_{\lambda_2} = 1$, responda:
- a) (1,0) Quais são as possibilidades para o polinômio característico de T ?
- b) (1,0) O polinômio minimal de T pode ser $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$? (justifique sua resposta!)
4. (1,5) Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre um espaço vetorial V de dimensão finita n . Suponha que T seja diagonalizável e que exista um vetor $u \in V$ tal que $T^2(u) = 0$. Mostre que $T(u) = 0$.
5. (1,5) Seja $A \in M_{5 \times 5}(\mathbb{R})$ (espaço das matrizes reais de ordem 5) uma matriz cujo polinômio característico é $p(x) = (x + 1)^2(x + 5)^3$. Determine as possíveis formas de Jordan da matriz A .
6. (1,5) Seja $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ munido com o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Calcule o ângulo entre os elementos $f(t) = t + e^t$ e $g(t) = t$.