

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Prova do Processo Seletivo 2025.1

1. (2,0) Sejam A um anel comutativo com identidade e S um conjunto multiplicativo de A . Considere a função $\phi : A \rightarrow S^{-1}A$ definida por $\phi(a) = \frac{a}{1}$. Mostre que

a) ϕ é um homomorfismo de anéis.

b) Se J é um ideal em $S^{-1}A$, então $I := \phi^{-1}(J)$ é um ideal em A .

c) Se J é um ideal em $S^{-1}A$, então

$$J = S^{-1}I := \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in I, s \in S \right\},$$

sendo $I = \phi^{-1}(J)$.

2. (1,5) Seja A um anel comutativo com identidade. Suponha que todo ideal próprio de A é um ideal primo. Mostre que A é um corpo.

3. (1,5) Sejam A um anel comutativo com identidade Noetheriano e $\sigma : A \rightarrow A$ um homomorfismo de anéis sobrejetor. Mostre que σ é injetor.

4. (2,0) Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e N um subgrupo de G .

a) Mostre que se $g^2 = e$, $\forall g \in G$, então G é abeliano.

b) Suponha que $a^2 \in N$, $\forall a \in G$. Mostre que N é um subgrupo normal em G e que G/N é um grupo abeliano.

5. (1,0) Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e H, K subgrupos de G . Defina $H \cdot K := \{hk \in G \mid h \in H, k \in K\}$. Mostre que $H \cdot K$ é subgrupo de G se, e somente se, $H \cdot K = K \cdot H$.

6. (2,0) Seja $(G, \cdot)$ um grupo de ordem pq com p, q primos distintos. Mostre que

a) Se p não divide $q - 1$, então G tem um p -subgrupo de Sylow normal.

b) G não é simples.

c) Se p não divide $q - 1$ e q não divide $p - 1$, então G é cíclico.