

ANÁLISE NO $\mathbb{R}^n$

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2025.1

1. (1,25 pt) Mostre que se E é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $\dim(E) \leq n - 2$ então $\mathbb{R}^n \setminus E$ é conexo.
2. (a)(0,25 pt) Defina contração. Dê um exemplo de uma contração.
(b)(1,0 pt) Mostre que se $\varphi : X \rightarrow X$ é uma contração, onde X é um conjunto qualquer, e se existe um ponto fixo de φ , então ele deve ser único.
(c)(1,25 pt) Mostre que se $\varphi : B[0, 1] \rightarrow B[0, 1]$ é uma contração, então existe um único $x \in B[0, 1]$ tal que $\varphi(x) = x$.
3. (a)(0,25 pt) Defina aplicação de classe C^1 e enuncie o teorema da aplicação inversa.
(b)(1,25 pt) Mostre que se $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 , onde E é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e $f'(a)$ é invertível para algum $a \in E$, então existem conjuntos abertos U e V de $\mathbb{R}^n$ tais que $a \in U$, $f(a) \in V$, $f|_U : U \rightarrow f(U)$ é bijetora e $f(U) = V$.
4. (1,25 pt) Considere uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^n$. Defina a noção de integrabilidade para f e mostre que se o conjunto D_f dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula então f é integrável.
5. (a)(0,25 pt) Defina a noção de superfície de dimensão m e classe C^k .
(b)(0,75 pt) Defina a noção de espaço vetorial tangente a uma superfície M num ponto $p \in M$. Considere a superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada (localmente em torno de $p = (0, 0, 0)$) pela parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, onde

$$\varphi(x, y) = (x + y^{2022}, x^{41} + x^3 y^{47} + y^{2023}, xy^2 + y).$$

e U é uma vizinhança aberta da origem. Descreva o espaço tangente de M no ponto $p = (0, 0, 0)$.

(c)(1,25 pt) Mostre que o conjunto M das matrizes 4×4 de posto 2 é uma superfície de classe C^1 de dimensão 12 em $\mathbb{R}^{16}$.

6. (1,25 pt) Chama-se semi-reta de origem 0 em $\mathbb{R}^n$ a um conjunto do tipo

$$\sigma = \{tv \mid t \geq 0, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Seja $X \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ um conjunto compacto que tem exatamente um (único) ponto em comum com cada semi-reta com origem 0. Mostre que X é homeomorfo à esfera S^{n-1} .