

ANÁLISE NA RETA

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2025.1

1. **(2,0)** Sendo $a \geq 2$, considere a sequência dada por

$$a_1 = \sqrt{a} \text{ e } a_{n+1} = \sqrt{a + \sqrt{a_n}}, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Mostre **por indução** que $a_n < a$ para todo $n \geq 1$, seguindo os passos abaixo:

a) Prove que $a(a - 1) > 0$ para todo $a \geq 2$.

b) Prove que $\sqrt{a} < a$ para todo $a \geq 2$.

c) Mostre que se $a_n < a$, então $a_{n+1} < \sqrt{2a}$.

d) Nas condições de c), mostre que $a_{n+1} < a$ para todo $n = 1, 2, \dots$

e) Conclua o resultado.

2. **(2,5)** Dizemos que (a_n) é uma *sequência de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ sempre que $m, n > n_0$.

a) (1,0) Prove que toda sequência de Cauchy é limitada.

b) (1,5) Prove que uma sequência (a_n) em $\mathbb{R}$ é convergente se, e somente se, é de Cauchy.

3. **(1,5)** Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge, isto é, toda série absolutamente convergente é convergente em $\mathbb{R}$. Forneça um exemplo de que a recíproca desse resultado não é verdadeira.

4. **(1,5)** Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua. Prove que f possui um ponto fixo, isto é, existe $a \in [0, 1]$ tal que $f(a) = a$. (Dica: use o Teorema do Valor Intermediário)

5. **(1,5)** Seja $f : [a, b] \rightarrow B$ contínua, derivável em (a, b) , exceto possivelmente num ponto $c \in (a, b)$. Mostre que se $\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = M$, então $f'(c)$ existe e vale exatamente M .

6. **(1,0)** Considere a *função de Dirichlet* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 1$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Justifique por que a função f não é Riemann-integrável.