

# GEOMETRIA DIFERENCIAL

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2025.1

1. (1,0) Mostre que a curva  $\alpha(t) = (t, t^2 + 1, 1 - t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva plana.
2. (2,0) Encontre o plano tangente da superfície dada pelo gráfico da função  $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ , no ponto  $(0, 0, 4)$ .
3. (2,0) Calcule as curvaturas principais da superfície dada pelo gráfico da função  $z = x^2 + y^2$ , no ponto  $(0, 0, 0)$ .
4. Responda:
  - (i) (1,0) Se existem duas geodésicas simples e fechadas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  em uma superfície  $S$  compacta, conexa e com curvatura positiva, mostre que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  se intersectam.
  - (ii) (1,0) Seja  $T$  um triângulo geodésico em uma superfície  $S$ . Mostre que

$$\int_T K dA + \pi = \sum_{i=1}^3 \varphi_i,$$

onde  $\varphi_i$  são os ângulos internos de  $T$ . A seguir, deduza que a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico na esfera é maior que  $\pi$ .

- (iii) (1,0) Mostre que o elipsóide e a esfera possuem a mesma característica de Euler.
5.
  - (i) (1,0) Sejam  $A$  uma matriz  $3 \times 3$  simétrica e  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ . Mostre que  $p$  é ponto crítico de  $f$  se e só se  $A(p) = f(p)p$ .
  - (ii) (1,0) Seja  $S$  uma superfície conexa tal que todas as retas normais são paralelas a um vetor  $a \in \mathbb{R}^3$ . Mostre que  $S$  está contido em algum plano ortogonal ao vetor  $a$ .