

# ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Prova do Processo Seletivo 2025.2

1. (1,0) Seja  $A$  um anel comutativo com identidade. Mostre que

$A$  é Noetheriano, se e somente se, toda cadeia ascendente de ideais de  $A$  é estacionária.

2. (1,5) Sejam  $A$  um anel comutativo com identidade e  $P, Q$  ideais primos de  $A$ . Mostre que

i)  $S = A \setminus (P \cup Q)$  é um conjunto multiplicativo de  $A$ ;

ii) O anel de frações  $S^{-1}A$  possui apenas uma quantidade finita de ideais maximais.

3. (1,5) Seja  $A$  um anel comutativo com identidade. Suponha que  $A$  é um anel Noetheriano. Mostre que cada ideal de  $A$  contém um produto finito de ideais primos de  $A$ .

4. (1,5) Seja  $G$  um grupo. Suponha que  $G$  é abeliano e simples. Mostre que

$G$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}_p$ , para algum  $p$  primo.

5. (1,0) Sejam  $G$  um grupo finito,  $H$  um subgrupo de  $G$  e  $N$  um subgrupo normal em  $G$ . Suponha que  $|H|$  e  $[G : N]$  sejam números relativamente primos. Mostre que  $H$  é subgrupo de  $N$ .

6. (1,5) Seja  $G$  um grupo. Considere o conjunto  $B = \{g \in G ; |g| < \infty\}$ . O conjunto  $B$  é um subgrupo de  $G$ ? Justifique sua resposta.

7. (1,0) Sejam  $G$  um grupo finito,  $H$  um subgrupo de  $G$  e  $P$  um  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G$ . Se  $P$  é um subgrupo normal em  $G$ , mostre que  $P \cap H$  é o único  $p$ -subgrupo de Sylow de  $H$ .

8. (1,0) Seja  $G$  um grupo de ordem  $p^2q$ , sendo  $p, q$  primos distintos. Mostre que  $G$  não é simples.