

ÁLGEBRA LINEAR

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2025.2

1. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ considere as bases ordenadas:

$$\alpha = \{(1, 2, 1), (-1, 2, -1), (1, 1, 3)\} \text{ e } \beta = \{(-3, 2, -3), (1, -1, -1), (5, 4, 9)\}.$$

- (a) (0,5) Determine as coordenadas do vetor $u = (6, 3, 8)$ em relação à base α (isto é, $[u]_\alpha$).
- (b) (0,5) Determine $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $[v]_\beta = [u]_\alpha$ sendo $u = (6, 3, 8)$.
- (c) (1,0) Determine $[I]_\alpha^\beta$ a matriz de mudança de base da base β para a base α .

2. Considere $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4) := \{T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \mid T \text{ é } \mathbb{R}\text{-linear}\}$. Sejam $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$ o núcleo e imagem de T . Nos itens a seguir **Justifique suas respostas!**

Existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tal que

- (a) (1,0) $\text{Im}(T) = \ker(T) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y, x + z - t = 0\}$?
 - (b) (1,0) T não possui nenhum autovalor?
 - (c) (1,0) T possui um único autovalor, cujo autoespaço associado tem dimensão 1?
3. Seja $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ com grau menor ou igual a d . Assuma que $d \geq 2$ e considere a transformação linear

$$L : \mathcal{P}_d(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_{d+1}(\mathbb{R}) \text{ dada por } p(x) \longmapsto p''(x) + xp(x)$$

em que $p''(x)$ denota a derivada segunda de $p(x)$.

- (a) (0,5) Mostre que L não é sobrejetora.
 - (b) (0,5) $q(x) = 2$ pertence à imagem de L ? **Justifique sua resposta!**
 - (c) (1,0) Determine a dimensão do núcleo e imagem de L .
4. Considere o subespaço $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 5z = 0\}$ do $\mathbb{R}^3$. Em relação ao produto interno

$$\langle (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \rangle = x \cdot x_1 + 5y \cdot y_1 + 2z \cdot z_1.$$

- (a) (0,5) Determine uma base ortonormal para W .
- (b) (1,0) Encontre uma base para $W^\perp$.

5. (1.5) Determine a forma normal de Jordan da matriz $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.