

ANÁLISE NA RETA

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2025.2

1. **(2,0)** Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto.
 - a) Descreva os conceitos de cotas superior e inferior de A e o conceito de limitação de A .
 - b) Descreva os conceitos de supremo e ínfimo de A .
 - c) Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente.
 - d) Mostre que $\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.
2. **(1,5)** Mostre que toda sequência decrescente e limitada converge para o ínfimo do conjunto formado pelos seus termos.
3. **(1,5)** Mostre que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, o conjunto de números
$$\left\{ S_A := \sum_{n \in A} a_n : A \subset \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n \in A} a_n \text{ converge} \right\}$$
é limitado.
4. **(2,0)** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.
 - a) Defina o limite $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
 - b) Prove que se f é contínua e valem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, então a função f assume seu valor mínimo.
5. **a) (1,0)** Enuncie, de forma precisa, o Teorema do Valor Médio.
b) (1,0) Mostre que se $f : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, derivável e par, então existe $x \in (-c, c)$ tal que $f'(x) = 0$.
6. **(1,0)** Prove que toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável. (Dica: neste caso, como $[a, b]$ é compacto, a função é uniformemente contínua.)