

ANÁLISE NO $\mathbb{R}^N$

Prova do Processo Seletivo PPGMat-UFPB 2025.2

1. **(1.5)** Dados dois subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^n$, define-se a distância de X a Y por

$$\text{dist}(X, Y) = \inf\{\|x - y\| : x \in X \text{ e } y \in Y\},$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Mostre que se X é fechado e Y é compacto, então existem $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tais que $\text{dist}(X, Y) = \|x_0 - y_0\|$. Dê exemplo de dois fechados X e Y em que $\text{dist}(X, Y)$ não é atingida.

2. **(1.5)** Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad (x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

também contínuas e $g : U \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 . Mostre que $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_a^{g(x)} f(x, t) dt,$$

é de classe C^1 e determine uma expressão para $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$ e $x \in U$.

3. **(1,0)** Sejam U um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, diferenciável em U e constante na fronteira ∂U . Prove que existe $x_0 \in U$ tal que $f'(x_0) = 0$.
4. **(1.5)** Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Um ponto crítico $a \in U$ de f é dito *não-degenerado* quando a matriz Hessiana de f nesse ponto é invertível, isto é, $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \neq 0$. Neste contexto, mostre que todo ponto crítico não-degenerado de f é um ponto crítico *isolado*.
5. **(1.5)** Prove que existem um aberto A de $\mathbb{R}^2$, com $(1, -1) \in A$, e um intervalo $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) tais que, para todo $(x, y) \in A$, a equação na variável real t , $xt^2 + e^{2t} + y = 0$, admite uma única solução $t = t(x, y) \in I$, e a função $t \mapsto t(x, y)$ assim definida é de classe C^∞ .
6. **(1.5)** Sejam $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq y \leq b\}$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove (com as devidas justificativas) que

$$\int_C f(x)f(y)dx dy = \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(t)dt \right)^2.$$

7. **(1.5)** Sejam $a_1, \dots, a_n > 0$ constantes e $E := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1 \right\}$ um *elipsóide sólido*. Se B_1 é a bola unitária fechada e centrada na origem de $\mathbb{R}^n$, mostre que

$$\text{vol}(E) = a_1 \dots a_n \text{vol}(B_1).$$