Lista 4 - Séries de Fourier

1. Determine se cada uma das funções a seguir é periódica. Em caso afirmativo, encontre seu período fundamental.

   (a) $\cos(3x)$.

   (b) $\sin(x) + \sin(\pi x)$.

   (c) $\cos(2x + \pi)$.

2. Estenda a função $f(x) = x$, definida em $[-\pi, \pi)$, a uma função periódica de período 2π e esboce seu gráfico.

3. Mostre que a série de Fourier de uma função par contém apenas o termo constante e termos de cosseno, enquanto a série de Fourier de uma função ímpar contém apenas termos de seno.

4. Calcule a série de Fourier de cada função f no intervalo indicado, considerando sua extensão periódica com período igual ao comprimento desse intervalo.

   (a) $f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi.$

   (b) $f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 2. \end{cases}$

   (c) $f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi.$

5. Utilize a série de Fourier obtida no Exercício 4(c) para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

6. (**Identidade de Parseval**) Seja f uma função contínua por partes em $[-\pi, \pi]$, com coeficientes de Fourier a_n e b_n. Mostre que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

   Dica: Considere o limite das somas parciais

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

7. Utilize a identidade de Parseval com $f(x) = 2x$ em $[-\pi, \pi]$ para concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

8. Para qual função converge a série de Fourier de $f(x) = x^3$ em $[-1, 1]$, considerando a extensão periódica de período 2? Justifique sua resposta, incluindo os pontos de junção dos períodos.

9. Calcule a série de Fourier-seno de

$$f(x) = \cos x, \qquad 0 < x < \pi.$$

10. Calcule a série de Fourier-cosseno de

$$f(x) = e^x, \qquad 0 < x < 1.$$