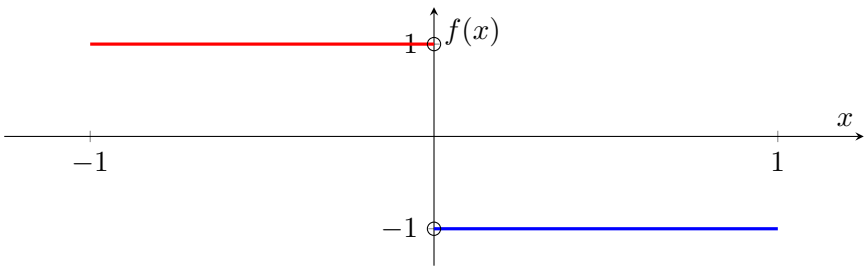
Introdução às Séries de Fourier

1 Um problema inicial: a distribuição de temperatura

Considere duas barras de mesmo comprimento. Inicialmente, uma está à temperatura de 1°C e a outra à temperatura de -1°C. Ao colocá-las em contato térmico, esperamos que o calor flua da região mais quente para a região mais fria.

Escolhendo coordenadas de modo que a junção esteja em $x = 0$, representamos a temperatura inicial por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ -1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$



O problema físico consiste em determinar como essa distribuição muda com o tempo. Antes disso, estudaremos um problema de representação:

> Como representar esse perfil descontínuo por meio de funções simples e suaves?

Nosso interesse não está apenas em descrever a temperatura inicial, mas em compreender como ela muda com o tempo. Para isso, seria útil escrever o perfil inicial como uma combinação de perfis cuja evolução conhecemos.

Os senos e cossenos são especialmente úteis porque, no modelo idealizado de condução do calor, com condições adequadas nas extremidades, um perfil senoidal evolui de maneira simples: ele mantém sua forma e sua amplitude diminui com o tempo. Além disso, o modelo é linear: podemos estudar cada componente separadamente e depois somar suas contribuições.

Portanto, se conseguirmos representar a função escada como uma soma de senos e cossenos, poderemos transformar o problema original em uma coleção de problemas mais simples.

Nesta aula, vamos estudar a primeira etapa dessa estratégia: como construir uma representação do perfil inicial por ondas?

Procuraremos aproximações construídas com senos e cossenos:

$$f(x) \approx A_0 + \sum_{n=1}^{N} \left[A_n \cos(n\omega x) + B_n \sin(n\omega x) \right].$$

Isso nos conduz a duas perguntas:

1. Quais frequências devemos utilizar?
2. Como determinar a participação de cada onda?

Distinção importante. Representar o perfil inicial não determina, por si só, a evolução da temperatura. Para estudar essa evolução, precisamos de um modelo físico e de condições nas extremidades das barras. Nesta aula, nosso objetivo será construir uma representação da função inicial.

2 Funções periódicas

Senos e cossenos são funções periódicas. Por isso, começamos entendendo essa propriedade.

Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *periódica* se existe $T > 0$ tal que

$$F(x + T) = F(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

O número T é chamado de *período*. Quando existe um menor período positivo, ele é chamado de *período fundamental*.

Exemplo 1

A função

$$F(x) = \sin x$$

tem período fundamental 2π, pois

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \text{ para todo } x.$$

Exemplo 2

A função

$$G(x) = \sin(2x)$$

tem período fundamental π, pois

$$\sin\big(2(x + \pi)\big) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x).$$

Conhecer uma função de período T em um intervalo de comprimento T permite reconstruí-la em toda a reta.

Pausa para pensar

Se T é um período de uma função, $2T$ também é? E $T/2$?

3 Extensão periódica

Uma função definida apenas em um intervalo pode ser utilizada para construir uma função periódica, repetindo-se o trecho original.

Considere

$$f(x) = x, \qquad -1 < x < 1.$$

Queremos construir uma função de período 2 que coincida com f nesse intervalo.

No intervalo seguinte, $1 < x < 3$, definimos

$$F(x) = f(x-2) = x - 2.$$

No intervalo anterior, $-3 < x < -1$, definimos

$$F(x) = f(x+2) = x + 2.$$

Em geral,

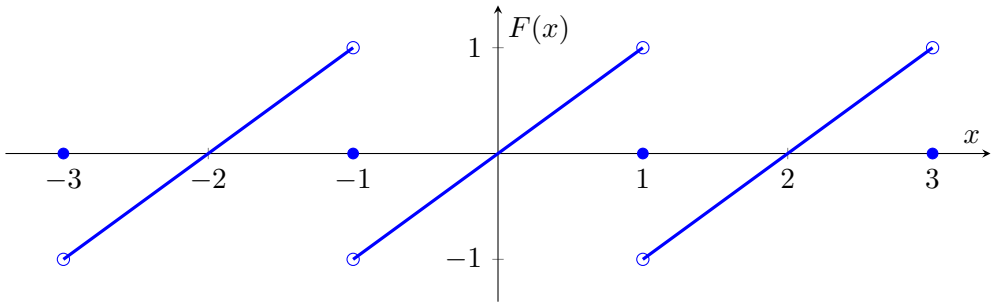
$$\boxed{F(x) = x - 2k, \qquad 2k-1 < x < 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Nos pontos de junção, podemos escolher

$$F(2k+1) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Essa escolha completa a definição e preserva a periodicidade:

$$F(x+2) = F(x).$$



O que acontece nos pontos de junção?

Em $x = 1$, temos

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 1^+} F(x) = -1.$$

Portanto, a extensão periódica apresenta um salto nesse ponto. O mesmo acontece nos demais pontos $2k+1$.

Analisando os extremos?

Se começássemos com $f(x) = x$ no intervalo fechado $[-1, 1]$, não seria possível preservar os dois valores dos extremos em uma extensão de período 2. De fato, a periodicidade exige

$$F(-1) = F(1),$$

enquanto a fórmula original fornece

$$f(-1) = -1 \qquad \text{e} \qquad f(1) = 1.$$

Para evitar essa incompatibilidade, podemos:

- trabalhar no intervalo aberto $(-1, 1)$ e escolher os valores nas junções; ou
- começar com um intervalo semiaberto, como $[-1, 1)$.

Pausa para pensar

Compare as extensões periódicas de

$$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2,$$

definidas inicialmente em $[-1, 1)$. Qual delas é contínua nos pontos de junção? Por quê?

4 Funções contínuas por partes

Dizemos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é *contínua por partes* se existe uma partição finita

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

tal que:

1. f é contínua em cada intervalo aberto (x_{j-1}, x_j);
2. os limites laterais de f, tomados a partir do interior de cada um desses intervalos, existem e são finitos.

Em particular, exigimos a existência dos limites

$$f(a^+), \qquad f(b^-),$$

e, nos pontos interiores da partição,

$$f(x_j^-), \qquad f(x_j^+).$$

Esses limites não precisam coincidir entre si nem com $f(x_j)$. Portanto, a definição permite saltos e descontinuidades removíveis.

Por exemplo, a função escada apresentada no problema inicial é contínua por partes. Já a função

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

não é contínua por partes em $[0, 1]$, pois não possui limite lateral finito em 0.

Toda função contínua por partes em um intervalo fechado e limitado é limitada e integrável. Assim, seus coeficientes de Fourier estão bem definidos.

5 A proposta de Fourier em $[-\pi, \pi]$

Em 1822, Joseph Fourier afirmou que toda função de período 2π pode ser representada por uma série trigonométrica infinita.

Para representar funções de período 2π, utilizamos as funções

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos(2x), \quad \sin(2x), \quad \ldots$$

Todas têm 2π como um período.

Procuramos uma representação da forma

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right].}$$

Essa expressão é chamada de *série de Fourier de* f.

O símbolo $\sim$ indica a série associada à função. Em que sentido a série recupera f é uma questão de convergência, que será discutida posteriormente.

A soma parcial de ordem N é

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right].$$

Nosso próximo objetivo é determinar os coeficientes a_n e b_n.

6 Ortogonalidade: como separar as componentes

No espaço de vetores, o produto escalar permite calcular projeções e identificar direções perpendiculares.

Para funções reais em $[-\pi, \pi]$, consideramos o produto interno

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Dizemos que f e g são *ortogonais* quando

$$\langle f, g\rangle = 0.$$

As funções trigonométricas satisfazem as relações

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m, \end{cases} \qquad n, m \geq 1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m, \end{cases} \qquad n, m \geq 1,$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n, m \geq 1.$$

Além disso,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n \geq 1,$$

enquanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

Uma justificativa

Quando $n \neq m$, usamos a identidade

$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left[\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\right].$$

Como cada cosseno do lado direito tem integral nula em $[-\pi, \pi]$, concluímos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Quando $n = m$, usamos

$$\cos^2(nx) = \frac{1 + \cos(2nx)}{2}$$

e obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \pi.$$

As demais relações são obtidas de maneira semelhante.

7 Coeficientes de Fourier

Considere inicialmente um polinômio trigonométrico

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right].$$

O coeficiente constante

Integrando em $[-\pi, \pi]$, todos os senos e cossenos desaparecem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\,2\pi = a_0\pi.$$

Portanto,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Os coeficientes dos cossenos

Multiplicando por $\cos(mx)$ e integrando, a ortogonalidade fornece

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = a_m\pi.$$

Assim,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x.$$

Os coeficientes dos senos

Analogamente,

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x.$$

Esses cálculos motivam a definição dos coeficientes para uma função geral f:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \qquad n \geq 1,}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \qquad n \geq 1.}$$

Em particular,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

é o valor médio de f no intervalo.

Observação. A dedução anterior foi feita para somas finitas. Para funções gerais, as integrais definem os coeficientes de Fourier; os resultados de convergência esclarecerão em que sentido a série representa a função. Dessa forma, não precisamos trocar uma soma infinita com uma integral sem justificativa.

8 Generalização para um intervalo $[a, b]$

Para representar uma função em $[a, b]$, utilizando sua extensão de período $T = b - a$, consideramos

$$\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right), \qquad \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right).$$

As funções trigonométricas utilizadas são ortogonais em qualquer intervalo de comprimento $T = b-a$.

Nessa convenção, escrevemos

$$\boxed{f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\right].}$$

Como

$$\int_a^b \cos^2\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\,\mathrm{d}x \;= \int_a^b \sin^2\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}, \qquad n \geq 1,$$

então, os coeficientes são

$$\boxed{A_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,}$$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad n \geq 1,}$$

$$\boxed{B_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad n \geq 1.}$$

A continuidade por partes garante a existência dessas integrais. Para garantir convergência pontual por um teorema clássico, podemos impor condições adicionais, por exemplo que f seja C^1 por partes. Nesse caso, a série converge para a média dos limites laterais da extensão periódica.

9 Funções pares e ímpares

Considere uma função definida em um domínio simétrico em relação à origem.

Dizemos que f é *par* quando

$$f(-x) = f(x).$$

Seu gráfico possui simetria em relação ao eixo vertical.

Dizemos que f é *ímpar* quando

$$f(-x) = -f(x).$$

Seu gráfico possui simetria em relação à origem.

Por exemplo,

$$|x|, \quad x^2, \quad \cos x$$

são funções pares, enquanto

$$x, \quad x^3, \quad \sin x$$

são funções ímpares.

Uma função pode não ser par nem ímpar. A função nula é simultaneamente par e ímpar.

Propriedades

- O produto de duas funções pares é par.
- O produto de duas funções ímpares é par.
- O produto de uma função par por uma ímpar é ímpar.
- Uma função ímpar definida em 0 satisfaz $f(0) = 0$.

Se f é integrável em $[-L, L]$, então

$$\boxed{\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx \quad \text{quando } f \text{ é par,}}$$

e

$$\boxed{\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0 \quad \text{quando } f \text{ é ímpar.}}$$

10 Simetria e coeficientes de Fourier

Em $[-L, L]$, as fórmulas gerais são

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \qquad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \qquad n \geq 1.$$

Se f é par, então

$$b_n = 0,$$

e

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx.$$

Se f é ímpar, então

$$a_n = 0, \qquad n \geq 0,$$

e

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx.$$

11 Retomando o perfil inicial

A onda quadrada e o fenômeno de Gibbs

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

estendida periodicamente com período 2. Nos pontos de salto, atribuímos o valor zero.

Como o período é 2, usamos as ondas $\sin(n\pi x)$ e $\cos(n\pi x)$. A função é ímpar; portanto, temos

$$a_0 = a_n = 0.$$

Os coeficientes dos senos são

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx \\ &= -2\int_{0}^{1} \sin(n\pi x)\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ -\dfrac{4}{n\pi}, & n \text{ ímpar}, \end{cases}$$

e a série de Fourier é

$$\boxed{f(x) \sim -\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)\pi x)}{2j+1}.}$$

Para visualizar a aproximação, denotaremos por S_k a soma dos primeiros k termos não nulos:

$$S_k(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\sin((2j+1)\pi x)}{2j+1}.$$

Assim,

$$S_1(x) = -\frac{4}{\pi}\sin(\pi x),$$

$$S_2(x) = -\frac{4}{\pi}\left[\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3}\right],$$

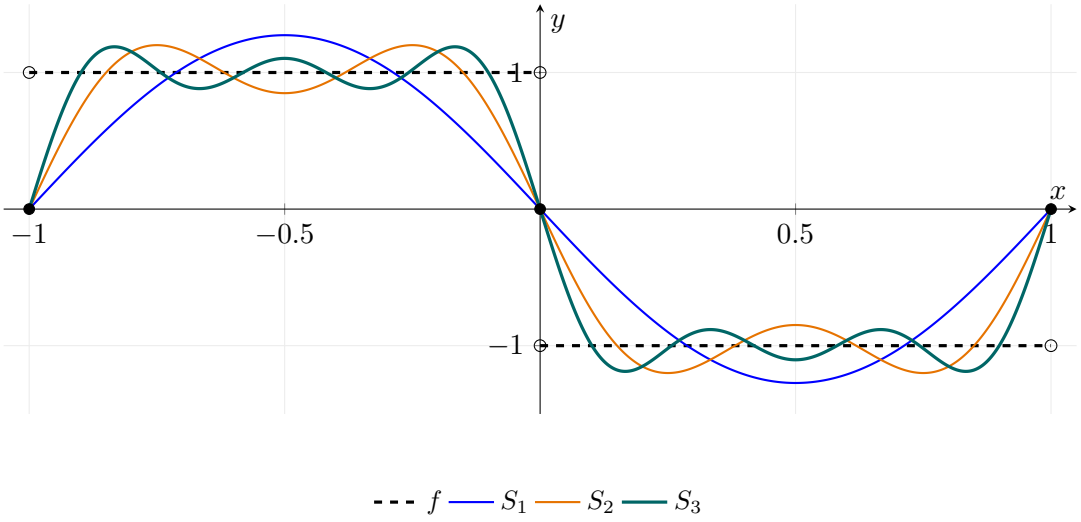
e

$$S_3(x) = -\frac{4}{\pi}\left[\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{3} + \frac{\sin(5\pi x)}{5}\right].$$

Observe que S_3 contém três termos não nulos, mas sua maior frequência é 5π.

Ao acrescentar termos, as aproximações reproduzem melhor os patamares da onda quadrada. Entretanto, próximo dos saltos, surgem oscilações que ultrapassam os valores 1 e -1.

Esse comportamento é conhecido como **fenômeno de Gibbs**. À medida que o número de termos aumenta, as oscilações próximas do salto se concentram em uma região cada vez menor, mas o excesso máximo não tende a zero.



12 Exemplo: $f(x) = |x|$ em $(-1, 1)$

O comprimento do intervalo é 2. Portanto,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)).$$

Calculamos primeiro

$$a_0 = \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\int_{0}^{1} x\, dx = 1.$$

Para $n \geq 1$,

$$a_n = 2\int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)\, dx.$$

Integrando por partes,

$$\int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)\, dx = \left[\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1.$$

Logo,

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}.$$

Por outro lado,

$$b_n = \int_{-1}^{1} |x|\sin(n\pi x)\, dx = 0,$$

pois o integrando é ímpar.

Consequentemente,

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n \text{ ímpar}, \end{cases}$$

e

$$\boxed{|x| \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}, \qquad -1 \leq x \leq 1.}$$

Esse exemplo ilustra como a simetria permite prever os coeficientes nulos e reduzir as integrais ao semi-intervalo $[0, 1]$.

13 Extensões pares e ímpares

Suponha que f seja conhecida apenas em $[0, L]$. Os valores para $x < 0$ não estão determinados pelos dados originais.

Podemos completar o intervalo de duas maneiras naturais.

Extensão par

Definimos

$$F_p(x) = f(|x|), \qquad -L \leq x \leq L.$$

Equivalentemente,

$$F_p(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ f(-x), & -L \leq x < 0. \end{cases}$$

Essa função é par. Depois, repetimos o trecho com período $2L$.

Extensão ímpar

No interior do intervalo, definimos

$$F_i(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -L < x < 0. \end{cases}$$

Essa função é ímpar. Para obter uma extensão ímpar e $2L$-periódica em toda a reta, podemos atribuir valor zero aos pontos kL, com $k \in \mathbb{Z}$.

Se $f(0) \neq 0$ ou $f(L) \neq 0$, essa construção não preserva esses valores dos extremos. Ela preserva a função no intervalo aberto $(0, L)$ e não altera as integrais que definem os coeficientes.

14 Exemplo: $f(x) = x - x^2$ em $[0, 1]$

Temos

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Extensão par

Para $-1 \leq x < 0$,

$$F_p(x) = f(-x) = -x - x^2.$$

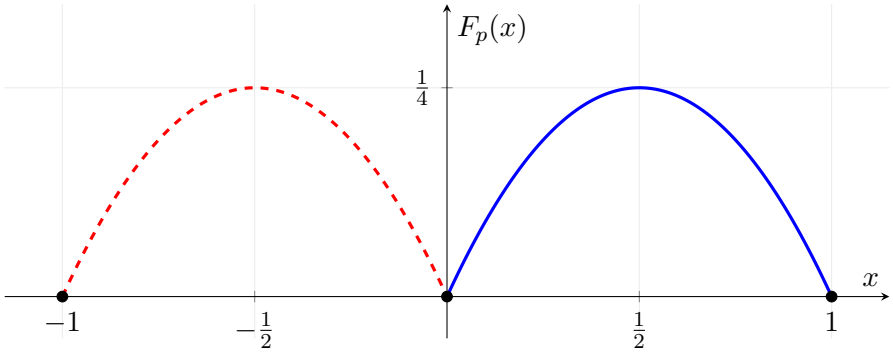
Portanto,

$$F_p(x) = \begin{cases} -x - x^2, & -1 \leq x < 0, \\ x - x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Podemos escrever

$$\boxed{F_p(x) = |x| - x^2.}$$

Seu gráfico é obtido refletindo o trecho original em relação ao eixo vertical. Em seguida, construímos sua extensão de período 2.



Extensão ímpar

Para $-1 \leq x < 0$,

$$F_i(x) = -f(-x) = x + x^2.$$

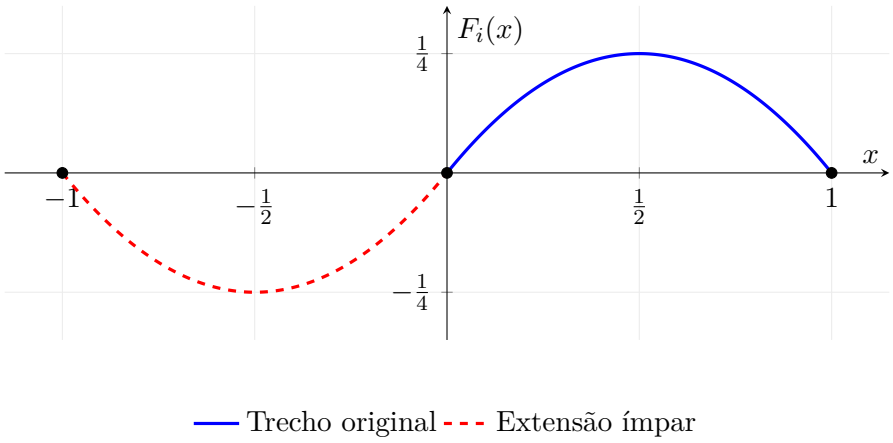
Assim,

$$F_i(x) = \begin{cases} x + x^2, & -1 \leq x < 0, \\ x - x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\boxed{F_i(x) = x - x|x|.}$$

Seu gráfico é obtido refletindo o trecho original em relação à origem. Depois, repetimos o resultado com período 2.



15 Série de Fourier-cosseno

A *série de Fourier-cosseno* de uma função definida em $[0, L]$ é a série de Fourier de sua extensão par:

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),}$$

onde

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \qquad n \geq 0.}$$

Os coeficientes dos senos são nulos porque a extensão é par.

16 Série de Fourier-seno

A *série de Fourier-seno* de uma função definida em $[0, L]$ é a série de Fourier de sua extensão ímpar:

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),}$$

onde

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \qquad n \geq 1.}$$

O termo constante e os coeficientes dos cossenos são nulos porque a extensão é ímpar.

Interpretação. Uma mesma função em $(0, L)$ pode admitir uma representação por cossenos e outra por senos. Essas representações correspondem a diferentes extensões para $(-L, L)$.

O período considerado nessas construções é $2L$. Isso difere de tomar diretamente $[0, L)$ como um período de comprimento L.

17 Interpretação em $L^2([-\pi, \pi])$

O espaço $L^2([-\pi, \pi])$ é formado pelas funções mensuráveis $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ para as quais

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty,$$

identificando funções que são iguais quase em toda parte.

Nesse espaço vetorial, a norma é

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

A família trigonométrica

$$1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots$$

é um *sistema ortogonal completo* de $L^2([-\pi, \pi])$. A palavra "base" é usada aqui no sentido de base de Hilbert: aproximações por combinações finitas convergem na norma do espaço.

Mais precisamente, se $f \in L^2([-\pi, \pi])$, então suas somas parciais de Fourier satisfazem

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0.}$$

Além disso, S_N é a melhor aproximação de f, na norma L^2, entre os polinômios trigonométricos com frequências até N. Isto é,

$$\|f - S_N\|_{L^2} \leq \|f - p\|_{L^2}$$

para todo

$$p \in \operatorname{span}\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos(Nx), \sin(Nx)\}.$$

Duas propriedades com papéis diferentes. A ortogonalidade permite calcular separadamente os coeficientes. A completude garante que as aproximações podem recuperar qualquer função de L^2 na norma desse espaço.

Cuidado. Convergência em L^2 não significa, por si só, convergência em cada ponto.

18 Convergência das séries de Fourier

Até aqui, aprendemos a associar uma função a sua série de Fourier. Restam duas questões fundamentais:

Pausa para pensar

A série de Fourier converge? Quando converge, sua soma é igual à função original?

Para uma função de período $2L$, escrevemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

A soma parcial de ordem N é

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

Estudar a convergência pontual da série significa investigar, para cada x fixado, a existência e o valor do limite

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x).$$

18.1 Um primeiro cuidado: valores isolados

Os coeficientes de Fourier são definidos por integrais. Por isso, alterar os valores de uma função em um número finito de pontos de um período não altera seus coeficientes.

Consequentemente, duas funções que diferem apenas nesses pontos possuem a mesma série de Fourier.

Pausa para pensar

Se duas funções têm valores diferentes em um ponto, mas possuem exatamente a mesma série de Fourier, essa série pode convergir para ambas nesse ponto?

A resposta é não. Portanto, não podemos esperar que a série de Fourier recupere automaticamente todos os valores atribuídos à função.

O comportamento da função nas proximidades de um ponto será decisivo.

18.2 Regularidade por partes

Já vimos que uma função contínua por partes pode apresentar um número finito de saltos ou descontinuidades removíveis em um intervalo fechado.

Para obter um resultado clássico de convergência pontual, utilizaremos uma hipótese um pouco mais forte.

Dizemos que f é C^1 *por partes* em $[a, b]$ se existe uma partição finita

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

tal que, em cada intervalo (x_{j-1}, x_j):

1. f é continuamente diferenciável;
2. f e f' possuem limites laterais finitos nas extremidades.

Não exigimos que os limites de f coincidam nos pontos da partição, nem que coincidam com os valores atribuídos nesses pontos.

Essa condição permite funções com cantos e saltos. Por exemplo, as funções $|x|$ e a onda quadrada são C^1 por partes em um período.

18.3 Teorema de convergência pontual

Teorema de convergência de Fourier

Seja f uma função $2L$-periódica e C^1 por partes em um período. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, sua série de Fourier converge e

$$\boxed{\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]}$$

Os limites laterais são tomados na extensão periódica.

Esse resultado distingue três situações.

Pontos de continuidade

Se f é contínua em x, então

$$f(x^-) = f(x^+) = f(x).$$

Consequentemente,

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]}$$

Pontos de salto

Se

$$f(x^-) \neq f(x^+),$$

a série converge para o ponto médio entre os dois valores laterais:

$$\boxed{\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]}$$

Esse limite independe do valor atribuído a $f(x)$.

Descontinuidades removíveis

Se

$$f(x^-) = f(x^+) = \ell, \qquad f(x) \neq \ell,$$

a série converge para ℓ, e não para $f(x)$.

18.4 O que acontece nos extremos do intervalo?

Considere uma função definida inicialmente em $[a, b]$, com extensão periódica de período $T = b - a$.

Ao atravessar o extremo b, entramos no início do próximo ciclo. Portanto, os limites que devemos comparar são

$$f(b^-) \qquad \text{e} \qquad f(a^+).$$

Sob as hipóteses do teorema, a série converge nos dois extremos para

$$\boxed{\frac{f(a^+) + f(b^-)}{2}}.$$

Hipótese escondida

A continuidade da fórmula no intervalo $[a, b]$ não garante a continuidade de sua extensão periódica. É necessário verificar se os extremos se encaixam.

18.5 Exemplo: a onda quadrada

Considere a função de período 2 dada, em um período, por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Sua série de Fourier é

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)\pi x)}{2j+1}.$$

Nos intervalos de continuidade, o teorema fornece

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)\pi x)}{2j+1} = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ -1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Em $x = 0$, a soma é

$$\frac{1 + (-1)}{2} = 0.$$

Nas junções $x = \pm 1$, os limites laterais da extensão periódica também são 1 e -1. Logo, a soma é zero.

Por periodicidade, a série converge para zero em todos os inteiros.

Obtendo uma soma numérica. Tomando $x = \frac{1}{2}$, temos $f(\frac{1}{2}) = -1$ e

$$\sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{2}\right) = (-1)^j.$$

Assim,

$$-1 = -\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1},$$

isto é,

$$\boxed{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.}$$

O teorema justifica a substituição porque $x = \frac{1}{2}$ é um ponto de continuidade.

18.6 Exemplo: uma função com salto na junção

Considere

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi,$$

com extensão de período 2π.

Sua série é

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

No interior do intervalo, a função é contínua. Portanto,

$$\boxed{x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx), \qquad -\pi < x < \pi.}$$

Em $x = \pi$, porém, devemos considerar os limites da extensão periódica:

$$f(\pi^-) = \pi, \qquad f(\pi^+) = -\pi.$$

Logo, a série converge para

$$\frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0.$$

Isso também pode ser verificado diretamente:

$$\sin(n\pi) = 0 \qquad \text{para todo } n.$$

18.7 Exemplo: $f(x) = |x|$

Para a extensão de período 2 de $f(x) = |x|$ em $[-1, 1]$, obtivemos

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}.$$

A função possui um canto em $x = 0$, mas é contínua nesse ponto. Além disso, os extremos se encaixam:

$$f(-1) = f(1) = 1.$$

Sua extensão periódica é contínua e C^1 por partes. Portanto, a série converge para essa extensão em todos os pontos.

Em particular, em $x = 0$,

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Concluímos que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

Um canto não obriga a série a convergir para um valor diferente de $f(x)$: o que importa aqui é a continuidade.

18.8 Convergência das séries de seno e cosseno

Seja f uma função C^1 por partes em $[0, L]$. Para interpretar suas séries de meio intervalo, aplicamos o teorema às extensões correspondentes.

Série de Fourier-cosseno

A série de cossenos representa a extensão par de f.

Em cada ponto $0 < x < L$, sua soma é

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Em particular, ela converge para $f(x)$ nos pontos de continuidade do intervalo aberto.

Nos extremos, a reflexão par fornece

$$\boxed{\text{soma em } x = 0 = f(0^+), \qquad \text{soma em } x = L = f(L^-).}$$

Se f é contínua em $[0, L]$, esses valores são $f(0)$ e $f(L)$.

Série de Fourier-seno

A série de senos representa a extensão ímpar de f.

No intervalo aberto $(0, L)$, sua soma também é

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Nos extremos, todos os termos são nulos:

$$\sin(0) = 0, \qquad \sin(n\pi) = 0.$$

Consequentemente,

$$\boxed{\text{soma em } x = 0 = 0, \qquad \text{soma em } x = L = 0.}$$

Esses valores coincidem com as médias dos limites laterais da extensão ímpar periódica.

Pausa para pensar

Se $f(0) \neq 0$, sua série de senos pode representar f em todos os pontos de $[0, L]$?

Ela pode representar f nos pontos de continuidade de $(0, L)$, mas não recupera um valor não nulo em $x = 0$. O mesmo cuidado vale para $x = L$.

Roteiro para analisar a convergência

Antes de substituir um valor de x em uma série de Fourier:

1. identifique a função e sua extensão periódica;
2. verifique as hipóteses de um teorema de convergência;
3. localize os saltos, incluindo as junções dos ciclos;
4. calcule os limites laterais no ponto considerado;
5. use

$$\text{soma da série} = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$