Lista 3 - Séries de Potências

1. Reescreva a expressão abaixo como uma única série de potências de x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5kc_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k.$$

2. Determine o raio e o intervalo de convergência de cada uma das séries de potências a seguir:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^{1-n}}{(-2)^{3-2n}}(x+4)^n.$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10x-1)^n}{n^{3+n}}$.

3. Represente cada uma das funções a seguir por uma série de potências e determine o respectivo intervalo de convergência:

   (a) $f(x) = \frac{8x}{1-8x}$

   (b) $f(x) = \frac{x^{5/2}}{4-3x^2}$.

4. Determine a série de Taylor de cada uma das funções a seguir em torno do ponto indicado:

   (a) $f(x)\sin x$, em torno de $x = \frac{3\pi}{2}$.

   (b) $f(x) = e^{1-8x}$ em torno de $x = 3$.

   (c) $f(x) = \sqrt{1+x}$ em torno de $x = 1$.

5. Determine a série de Maclaurin de cada uma das funções a seguir:

   (a) $f(x) = \cos(x^2)$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

6. Utilize o polinômio de Maclaurin de ordem 2 da função apropriada para aproximar cada um dos valores a seguir e estime o erro absoluto cometido:

   (a) $\ln(1,3)$

   (b) $e^{0,03}$

   (c) $\cos(0,2)$

   (d) $\sqrt{3,9}$

7. Mostre que para todo x,

$$|\sin x - x| \leq \frac{1}{6}|x^3|.$$

8. Use series para aproximar

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x\cos(x^3)dx$, com 3 casas decimais.

   (b) $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$, com erro menor que 10^{-8}.

9. Use series para calcular

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan(x)}{x^3}$

   (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 + \cos(\pi x)}{\sqrt{x-1}}$

10. **Energia potencial de um pêndulo.**

    A energia potencial de um pêndulo de massa m e comprimento L é

    $$U(\theta) = mgL(1 - \cos\theta),$$

    onde θ é medido em radianos e a energia potencial é zero na posição de equilíbrio.

    (a) Mostre que, para pequenos ângulos,

    $$U(\theta) \approx \frac{1}{2}mgL\theta^2.$$

    (b) Para $|\theta| \leq 0,2$, use o resto de Taylor para obter uma cota do erro absoluto da aproximação quadrática.

11. **Carga de um capacitor.**

    Em um circuito RC, inicialmente descarregado, a carga do capacitor no instante $t \geq 0$ é

    $$q(t) = CV\left(1 - e^{-t/(RC)}\right),$$

    onde R é a resistência, C a capacitância e V a tensão da fonte.

    (a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de q em torno de $t = 0$.

    (b) Considere $R = 10^3$, $C = 10^{-4}$ e $V = 10$. Aproxime $q(0,01)$ pelo polinômio quadrático.

    (c) Use o resto de Lagrange para mostrar que o erro dessa aproximação é inferior a $1,7 \cdot 10^{-7}$.

12. **Dilatação térmica e densidade.**

    Um líquido tem massa constante m e volume modelado por

    $$V(T) = V_0\big(1 + \beta(T - T_0)\big),$$

    onde $\beta > 0$ é o coeficiente de dilatação volumétrica, e V_0 é o volume inicial. Sua densidade é $\rho(T) = m/V(T)$. Denote $\rho_0 = m/V_0$.

    (a) Obtenha uma expansão de $\rho(T)$ em potências de $T - T_0$ e indique sua condição de convergência.

    (b) Determine a aproximação quadrática de $\rho(T)$ em torno de $T = T_0$.

13. **Distância entre uma antena e um receptor.**

    Uma antena está a uma altura h acima de um terreno plano. Um receptor está no solo, a uma distância horizontal d da base da antena. A distância entre a antena e o receptor é

    $$r(d) = \sqrt{h^2 + d^2}.$$

(a) Escreva $r(d)$ na forma

$$r(d) = h\sqrt{1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2}$$

e use a série binomial para obter os termos até grau 4 em d.

(b) Mostre que, para $d \ll h$,

$$r(d) - h \approx \frac{d^2}{2h}.$$

(c) Para $h = 100\,\text{m}$ e $d = 10\,\text{m}$, aproxime $r(d)$ usando os termos até grau 4.

(d) Aplicando o resto de Lagrange à função $f(u) = \sqrt{1+u}$, mostre que o erro dessa aproximação é inferior a $6,3 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$.

14. **Medição de deformações em uma barra.**

Na Engenharia, duas medidas de deformação longitudinal de uma barra são a deformação de engenharia,

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0},$$

e a deformação logarítmica,

$$\varepsilon_{\log} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right),$$

onde L_0 e L são os comprimentos inicial e final, respectivamente.

(a) Mostre que

$$\varepsilon_{\log} = \ln(1 + \varepsilon).$$

(b) Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 de $\varepsilon_{\log}$ em potências de ε, em torno de zero.

(c) Calcule

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon_{\log} - \varepsilon}{\varepsilon^2}$$

e interprete o sinal do resultado.

(d) Para um alongamento de 5%, aproxime $\varepsilon_{\log}$ pelo polinômio cúbico e obtenha uma cota do erro.