Séries de Potências

Sumário

1 Da série numérica à função **1**
1.1 Raio e Intervalo de convergência . . . 2
1.2 Exercícios . . . 3

2 Representação de funções **3**
2.1 Derivação e integração termo a termo . . . 3
2.2 2. A série geométrica como ponto de partida . . . 4
2.3 Logaritmo e arco-tangente . . . 5
2.4 Exercícios . . . 6

3 Operações e polinômios de Taylor **6**
3.1 Série de Taylor . . . 6
3.2 Exercícios . . . 8

4 Quanto vale o erro da aproximação? **8**
4.1 Do teorema fundamental ao resto integral . . . 8
4.2 Resto de Lagrange . . . 9
4.3 Resto Integal VS Resto de Lagrange . . . 10

5 Aplicações **11**

6 Série binomial **13**
6.1 Potências com expoente real . . . 13
6.2 Exercícios . . . 14

1 Da série numérica à função

Já conhecemos $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$ para $|q| < 1$. Se substituímos q por uma variável, obtemos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Pergunta inicial: a igualdade continua válida em $x = 2$? Não: o lado esquerdo existe, mas a série diverge. O domínio da função original e o intervalo de validade da representação são conceitos distintos.

Uma **série de potências centrada em** a tem a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \tag{1}$$

Os números c_n são seus coeficientes. Em $x = a$, a soma é c_0. A soma parcial

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

é um polinômio de grau n; se a série converge, $S_N(x)$ aproxima sua soma quando $N \to \infty$.

1.1 Raio e Intervalo de convergência

Para quais valores de x a série (1) converge?

Utilizando o teste da razão, sabemos que, para $x \neq a$, a série converge absolutamente se

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| < 1.$$

Simplificando a razão, essa condição torna-se

$$|x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1.$$

Portanto, quando o limite acima é positivo e finito, a série converge absolutamente se

$$|x-a| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|}.$$

Isso nos leva à fórmula

Definição 1. ***Raio de convergência:***

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Essa fórmula é válida desde que o limite exista e $c_n \neq 0$ para todo n suficientemente grande, com as convenções $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$.

Assim, a série converge absolutamente quando $|x-a| < R$ e diverge quando $|x-a| > R$. Se $0 < R < \infty$, a convergência nos pontos $x = a - R$ e $x = a + R$ deve ser analisada separadamente. Em $x = a$, a série sempre converge, com soma c_0.

Definição 2. *O* ***intervalo de convergência*** *de uma série de potências é o conjunto de todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série converge.*

Se a série tem centro a e raio de convergência $0 < R < \infty$, ela converge absolutamente no intervalo $(a-R, a+R)$ e diverge fora de $[a-R, a+R]$.

Assim, dependendo da convergência nos extremos, seu intervalo de convergência será um dos seguintes:

$$(a-R, a+R), \qquad [a-R, a+R), \qquad (a-R, a+R], \qquad [a-R, a+R].$$

Para determinar quais extremos pertencem ao intervalo, substituímos $x = a - R$ e $x = a + R$ na série original e analisamos cada série numérica resultante.

Se $R = \infty$, o intervalo de convergência é $\mathbb{R}$. Se $R = 0$, a série converge apenas em $x = a$, e seu conjunto de convergência é $\{a\}$.

Exemplo 1. *Determine o intervalo de convergência de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$.

Calculamos o raio de convergencia:

$$R := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

A série converge absolutamente em $1 < x < 3$ e diverge fora do intervalo fechado. Em $x = 1$, torna-se $\sum(-1)^n/n$, condicionalmente convergente; em $x = 3$, torna-se a harmônica, divergente. Assim, $R = 1$ e o intervalo é

$$I = [1, 3).$$

Exemplo 2. *Dois casos extremos:*

a) Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Como $c_n = \frac{1}{n!}$ *, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Portanto, seu ***raio de convergência*** *é*

$$\boxed{R = \infty}.$$

A série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$*, de modo que seu* ***intervalo de convergência*** *é*

$$I = (-\infty, \infty).$$

b) Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Como $c_n = n!$*, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Portanto, seu ***raio de convergência*** *é*

$$\boxed{R = 0}.$$

Para todo $x \neq 0$*, o teste da razão mostra que a série diverge, pois*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty.$$

Em $x = 0$*, a série converge, com soma igual a* 1*. Assim, seu* ***intervalo de convergência*** *reduz-se a um único ponto:*

$$I = \{0\}.$$

.

1.2 Exercícios

1. Determine centro, raio e intervalo de convergência para $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^n/(n^2 3^n)$.
2. Determine o intervalo convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{2n}$.
3. Compare os intervalos de convergência de $\sum x^n$, $\sum x^n/n$ e $\sum x^n/n^2$. Por que o mesmo raio não determina os mesmos extremos?

2 Representação de funções

2.1 Derivação e integração termo a termo

Em seu intervalo de convergência, uma série de potência define uma funcão. Nest caso, queremos fazer "cálculo" com essa função. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tem raio $R > 0$, então, para $|x-a| < R$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}, \qquad \int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

As duas séries resultantes têm o mesmo raio R. Entretando, o comportamento nos extremos pode mudar.

A derivação e a integração termo a termo se justificaticam pela convergência absoluta.

Para séries de potências, podemos obter um controle que vale simultaneamente em todos os pontos de qualquer intervalo fechado contido em $(a-R, a+R)$. Essa propriedade é chamada de **convergência uniforme**.

Para entender esse controle, fixe $0 < r < R$ e considere o intervalo $|x - a| \leq r$. Escolha um número ρ tal que

$$r < \rho < R.$$

Como a série converge em $x = a + \rho$, seus termos $c_n\rho^n$ tendem a zero e, portanto, são limitados. Assim, existe $M > 0$ tal que

$$|c_n|\rho^n \leq M \qquad \text{para todo } n.$$

Consequentemente, para qualquer x com $|x - a| \leq r$,

$$|c_n(x-a)^n| \leq |c_n|r^n \leq M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Observe que a expressão à direita não depende de x. Como $r/\rho < 1$, a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

converge. Essa comparação garante a convergência uniforme da série original em $[a - r, a + r]$ e permite integrá-la termo a termo nesse intervalo.

Para justificar a derivação, fazemos o mesmo com a série das derivadas. Para $n \geq 1$,

$$|nc_n(x-a)^{n-1}| \leq n|c_n|r^{n-1} \leq \frac{M}{\rho}\, n\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1}.$$

A série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{\rho}\, n\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1}$$

também converge. Logo, a série das derivadas converge uniformemente em $[a - r, a + r]$. Juntamente com a convergência da série original em $x = a$, isso permite derivar a soma termo a termo.

Como podemos escolher r de modo a incluir qualquer ponto de $(a - R, a + R)$, as duas operações são válidas em todo o interior do intervalo de convergência. Nos extremos, é necessária uma análise separada.

2.2 2. A série geométrica como ponto de partida

Para $|x| < 1$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Utilizando a derivação termo a termo, obtemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\ x \in (-1, 1).$$

Obtemos outro exemplo:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x/2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \qquad |x| < 2.$$

Nos extremos $x = \pm 2$, os termos não tendem a zero; Portanto, o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

Podemos reprensentar a mesma função em torno de diferentes pontos:

Por exemplo, em torno de $x_0 = 0$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,\ |x| < 1.$$

E para representar $\frac{1}{1+x}$ em torno de $x_0 = 2$ escrevemos

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}.$$

Utilizando a série geométrica

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n, \qquad |u| < 1,$$

com $u = (x-2)/3$, obtemos

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-2)^n}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{3} - \frac{x-2}{9} + \frac{(x-2)^2}{27} - \frac{(x-2)^3}{81} + \cdots.$$

Essa representação é válida quando

$$\left|\frac{x-2}{3}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-2| < 3 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 5.$$

Nos extremos $x = -1$ e $x = 5$, os termos da série não tendem a zero, de modo que ela diverge. Portanto, o raio e o intervalo de convergência são

$$\boxed{R = 3}, \qquad \boxed{I = (-1, 5)}.$$

2.3 Logaritmo e arco-tangente

Integrando $1/(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$ de 0 a x, com $|x| < 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

A série converge em $x = 1$ por Leibniz e diverge em $x = -1$. Logo, seu raio é $R = 1$ e seu intervalo de convergência é $I = (-1, 1)$. Em particular, observe que

$$\begin{aligned} \ln(2) = \int_0^1 \ln x \, dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \end{aligned} \tag{2}$$

De modo semelhante,

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} \quad \Longrightarrow \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Note que a série converge para $x = \pm 1$. Logo, a igualdade também vale em $x = 1$, fornecendo a identidade

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

.

Um outro exemplo: Para representar $\ln x$ em potências de $x - 1$, escrevemos

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{1+(t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (t-1)^n.$$

Integrando de 1 a x, encontramos

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}, \qquad 0 < x < 2.$$

A série tem centro 1, raio 1 e intervalo de convergência $(0, 2]$. A igualdade no extremo $x = 2$ foi justificada pelo cálculo anterior.

2.4 Exercícios

1. Represente $x/(1-x^2)$ e determine seu intervalo de convergência.
2. Represente $\ln(1-x)$ e analise os dois extremos.
3. Use a geométrica e suas derivadas para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} n/3^n$.
4. Represente $1/x$ em potências de $x-2$. Qual é o raio?

Tarefa de saída. Explique por que "integrar preserva o raio" não implica "integrar preserva o intervalo".

3 Operações e polinômios de Taylor

Propriedades das Séries de Potências

No interior do intervalo comum de convergência, as séries de potências satisfazem as seguintes propriedades:

1. **Soma (Linearidade):**

$$\alpha\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k.$$

2. **Multiplicação (Produto de Cauchy):**

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}\right) x^k.$$

3. **Mudança de Índice:**

$$\sum_{k=m}^{\infty} c_k x^{k-i} = \sum_{\ell=m-i}^{\infty} c_{\ell+i} x^{\ell}, \qquad \text{onde } \ell = k-i.$$

4. **Derivação Termo a Termo:**

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}.$$

5. **Integração Termo a Termo:**

$$\int \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) dx = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Divisão. Se $g(a) \neq 0$, procurar $f/g = \sum b_n (x-a)^n$ e usar $f = g \sum b_n (x-a)^n$. Igualar coeficientes determina sucessivamente $b_0, b_1, \ldots$. O quociente admite uma representação em alguma vizinhança de a; seu raio não precisa coincidir com o raio das séries iniciais.

3.1 Série de Taylor

Para f diferenciável em a, a definição de derivada dá

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

Observação 1. *A notação $o(h)$, lida como **"o pequeno de h"**, representa um termo que, dividido por h, tende a zero. Precisamente,*

$$r(h) = o(h) \quad \textit{quando } h \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Por exemplo, $h^2 = o(h)$*, pois*

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Por outro lado, $2h$ *não é* $o(h)$*, porque*

$$\lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2 \neq 0.$$

Se f *é diferenciável em* a*, a definição de derivada fornece*

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0.$$

Portanto, podemos escrever

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).}$$

Nessa expressão, $o(h)$ *representa o erro da aproximação linear: quando* $h \to 0$*, esse erro torna-se desprezível em comparação com o deslocamento* h*.*

Assim, a aproximação linear que tem erro $o(h)$ deve ter valor $f(a)$ e inclinação $f'(a)$. Para obter uma aproximação de ordem superior, procuramos um polinômio cujas derivadas até a ordem N coincidam com as de f em a.

Se $P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k(x-a)^k$, então $P_N^{(k)}(a) = k!b_k$. Logo, as condições $P_N^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ determinam unicamente

$$\boxed{P_N(x;a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.}$$

A este polinômio chamamos de *Polinômio de Taylor de* f*, de grau* N *e centrado em* a. Quando $a = 0$, temos o polinômio de Maclaurin.

Exemplo 3.

- ***Exponencial.*** *Todas as derivadas de* e^x *valem 1 em zero:*

$$P_3(x;0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

- ***Cosseno.*** *As derivadas em zero seguem o ciclo* $1, 0, -1, 0, 1, \ldots$*:*

$$P_4(x;0) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

- ***Logaritmo em outro centro.*** *Para* $f(x) = \ln x$*, temos* $f(1) = 0$*,* $f'(1) = 1$*,* $f''(1) = -1$*,* $f'''(1) = 2$*. Portanto,*

$$P_3(x;1) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

Definição 3 (Série de Taylor)**.** *Se todas as derivadas de* f *existem em* a*, sua série de Taylor é*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Há duas perguntas: essa série converge? Se converge, sua soma é $f(x)$? Existência de todas as derivadas não resolve essas perguntas. Por outro lado, se f já está representada por uma série de potências em uma vizinhança de a, a derivação termo a termo fornece $c_n = f^{(n)}(a)/n!$: a representação é necessariamente sua série de Taylor.

3.2 Exercícios

1. Encontre as séries de MacLaurin de $e^x, \cos x, \sin x$ e $tanx$.

4 Quanto vale o erro da aproximação?

Nessa sessão respondemos a seguinte pergunta: Quando a série de Taylor de uma função f converge para ela mesma?

4.1 Do teorema fundamental ao resto integral

Suponha $f \in C^{N+1}(I)$, com $a, x \in I$. O teorema fundamental do Cálculo fornece:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Uma integração por partes mostra que

$$\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = -(x-a)f'(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Logo, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$.

Repetir o procedimento produz o resto integral.

Fórmula de Taylor com resto integral:

$$\boxed{f(x) = P_N(x;a) + R_N(x;a), \quad R_N(x;a) = \frac{1}{N!}\int_a^x f^{(N+1)}(t)(x-t)^N dt.}$$

Verificação geral. Defina $I_N = \frac{1}{N!}\int_a^x f^{(N+1)}(t)(x-t)^N dt$. Para $N \geq 1$, integração por partes dá

$$I_N = I_{N-1} - \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N.$$

Como $I_0 = f(x) - f(a)$, a repetição fornece exatamente $I_N = f(x) - P_N(x;a)$. As integrais orientadas tornam a fórmula válida também para $x < a$.

Exemplo 4. *Considere $f(x) = \ln(1+x)$, definida para $x > -1$. Para $k \geq 1$, temos*

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Assim, seu polinômio de Maclaurin de ordem n é

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

Pela fórmula de Taylor com resto integral,

$$\ln(1+x) = P_n(x) + R_n(x),$$

onde

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

Para estimar esse resto, fazemos a mudança de variável

$$u = \frac{x-t}{1+t}.$$

Observe que

$$1+u = \frac{1+x}{1+t}, \qquad \frac{dt}{1+t} = -\frac{du}{1+u}.$$

Além disso, $t = 0$ corresponde a $u = x$, e $t = x$ corresponde a $u = 0$. Portanto,

$$\boxed{R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{u^n}{1+u}\, du.}$$

Fixe agora $-1 < x \leq 1$. No segmento entre 0 e x, temos

$$1 + u \geq m_x, \qquad m_x := \min\{1, 1+x\} > 0.$$

Consequentemente,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{m_x} \int_{\min\{0,x\}}^{\max\{0,x\}} |u|^n\, du = \frac{|x|^{n+1}}{m_x(n+1)} \leq \frac{1}{m_x(n+1)}.$$

Como x está fixado, m_x é uma constante positiva. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Concluímos que

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \qquad -1 < x \leq 1.}$$

4.2 Resto de Lagrange

Suponha que $f \in C^{n+1}(I)$. Pela fórmula de Taylor com resto integral,

$$f(x) = P_n(x; a) + R_n(x; a),$$

onde

$$R_n(x; a) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt.$$

Suponha inicialmente que $x > a$. No intervalo $[a, x]$, a função $f^{(n+1)}$ é contínua e o peso $(x-t)^n$ é não negativo. Pelo **Teorema do Valor Médio para Integrais**, existe $\xi \in (a, x)$ tal que

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n\, dt.$$

Como

$$\int_a^x (x-t)^n\, dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

obtemos

$$R_n(x; a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Portanto,

$$\boxed{f(x) = P_n(x; a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.}$$

Essa é a **fórmula de Taylor com resto de Lagrange**.

Para $x < a$, fazemos a mudança de variável $t = a + s(x-a)$ no resto integral:

$$R_n(x; a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}\big(a + s(x-a)\big)(1-s)^n\, ds.$$

Agora o peso $(1-s)^n$ é não negativo em $[0, 1]$. Aplicando novamente o Teorema do Valor Médio para Integrais e usando

$$\int_0^1 (1-s)^n\, ds = \frac{1}{n+1},$$

obtemos a mesma fórmula, com ξ entre x e a.

Se $|f^{(N+1)}(t)| \leq M_{N+1}$ no segmento entre a e x, então

$$\boxed{|R_N(x;a)| \leq \frac{M_{N+1}|x-a|^{N+1}}{(N+1)!}.}$$

Não é necessário conhecer ξ: escolhemos uma cota válida no segmento inteiro. A constante M_{N+1} pode depender de N; por isso o fatorial sozinho não garante que o erro tenda a zero.

Exemplo 5. *Vamos mostrar que a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ converge para e^x para todo $x \in \mathbb{R}$.*
Como

$$f^{(k)}(x) = e^x \qquad e \qquad f^{(k)}(0) = 1$$

para todo $k \geq 0$, o polinômio de Maclaurin de ordem n é

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange,

$$e^x = P_n(x) + R_n(x),$$

onde

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

para algum ξ_n entre 0 e x.
Fixe $x \in \mathbb{R}$. Como ξ_n está entre 0 e x, temos $e^{\xi_n} \leq e^{|x|}$. Consequentemente,

$$|R_n(x)| \leq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Para verificar que essa cota tende a zero, considere

$$b_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Se $x = 0$, temos $b_n = 0$. Se $x \neq 0$, então

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{|x|}{n+2} \longrightarrow 0.$$

Assim, para x fixado $\sum b_n$ converge pelo teste da razão, e portanto, $b_n \to 0$ quando $n \to \infty$.
Como $e^{|x|}$ é uma constante para x fixado, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Logo,

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Portanto, a série de Maclaurin de e^x representa a própria função em toda a reta real. Seu raio de convergência é $R = \infty$, e seu intervalo de convergência é $(-\infty, \infty)$.

4.3 Resto Integal VS Resto de Lagrange

A escolha entre o Resto de Lagrange e o Resto Integral fundamenta-se na natureza do problema linear ou analítico proposto:

Resto de Lagrange: Abordagem Numérica e Limitantes de Erro

O Resto de Lagrange é expresso por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

para algum c pertencente ao intervalo aberto entre x_0 e x.

Critério de Aplicação: Utilize esta forma quando o objetivo for a **quantificação numérica do erro** ou a determinação do número mínimo de termos n para atingir uma tolerância estipulada ϵ. É ideal quando a derivada de ordem $(n+1)$ possui um supremo $M = \sup |f^{(n+1)}(c)|$ facilmente calculável no intervalo, permitindo estabelecer a cota superior:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

Resto Integral: Abordagem Analítica e Demonstrações Teóricas

O Resto Integral é expresso por:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Critério de Aplicação: Utilize esta forma em **demonstrações formais de convergência** ou quando o comportamento pontual de $f^{(n+1)}(c)$ for intratável, impedindo a majoração direta exigida por Lagrange. É a escolha adequada quando o problema envolve operadores integrais subsequentes ou quando a estrutura da função permite simplificações via integração por partes repetida.

Critério de Decisão Rápida

Objetivo do Problema	**Forma do Resto Recomendada**
Cálculo de erro e aproximação numérica	Resto de Lagrange
Provas de teoremas e análise assintótica	Resto Integral

5 Aplicações

Aproximar $e^{0,1}$. Usando P_3,

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^3}{6} = 1,105166\ldots$$

Como $e^t \leq e < 3$ em $[0,0,1]$, o erro é menor que $3(0,1)^4/4! = 1,25 \cdot 10^{-5}$.

Aproximar uma integral sem primitiva elementar. Em $0 \leq t \leq 1/2$, a série de e^{-t^2} é alternada com termos decrescentes em módulo. Integrando,

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}dt \approx \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3} + \frac{(1/2)^5}{10} = 0,46145833\ldots$$

O resto pontual tem módulo no máximo $t^6/6$, logo o erro da integral é no máximo $(1/2)^7/42 < 1,87 \cdot 10^{-4}$. O resultado garantido é uma faixa de valores, não um número exato.

Aplicações das Séries de Taylor ao Cálculo de Limites

As expansões de Taylor permitem identificar os primeiros termos que não se cancelam em uma expressão. Para calcular limites, geralmente bastam poucos termos, acompanhados de um controle do erro.

Nos exemplos abaixo, utilizaremos a notação

$$r(x) = o(x^m) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{r(x)}{x^m} = 0.$$

Exemplo 6. *Calcule*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Usando a expansão

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

obtemos

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Logo,

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.}$$

Exemplo 7. *Calcule*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}.$$

A aproximação linear $\sin x = x + o(x)$ *não é suficiente: vamos dividir o erro por* x^3*, e não por* x*. Precisamos da expansão até a ordem* 3*:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Logo,

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \longrightarrow -\frac{1}{6}.$$

Portanto,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.}$$

Observação. A ordem da expansão deve ser suficiente para revelar o primeiro termo que não se cancela. O resto também deve ser controlado: um erro $o(x)$, por exemplo, não pode ser tratado automaticamente como $o(x^3)$.

Cálculo de Integrais por Séries de Taylor

As séries de Taylor permitem calcular aproximadamente integrais cujas primitivas não são expressas por funções elementares. Para garantir quatro casas decimais, estimamos o erro e verificamos o arredondamento.

Exemplo 8. *Use uma série de potências adequada para aproximar cada integral com quatro casas decimais:*

$$(a)\quad \int_0^{1/3}\frac{dx}{1+x^6}, \qquad (b)\quad \int_0^{1/2}\arctan(x^2)\,dx.$$

(a) *Pela série geométrica,*

$$\frac{1}{1+x^6} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{6n}, \qquad |x|<1.$$

Integrando termo a termo em $[0, 1/3]$*, obtemos*

$$I = \int_0^{1/3}\frac{dx}{1+x^6} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(6n+1)3^{6n+1}}.$$

Essa série é alternada, com termos decrescentes em módulo e tendendo a zero. Usando os dois primeiros termos,

$$I \approx S_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3^7} \approx 0,3332680123.$$

Pela estimativa do erro em séries alternadas,

$$|I - S_1| \leq \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} < 4,83 \cdot 10^{-8}.$$

Como o próximo termo é positivo,

$$0,3332680 < I < 0,3332681.$$

Portanto, com quatro casas decimais,

$$\boxed{I \approx 0,3333.}$$

(b) *Utilizando a série do arco-tangente,*

$$\arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2n+1}, \qquad |x| < 1.$$

Integrando termo a termo em $[0, 1/2]$*, encontramos*

$$J = \int_0^{1/2} \arctan(x^2)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+3)2^{4n+3}}.$$

A série resultante também é alternada, com termos decrescentes em módulo e tendendo a zero. Tomando os dois primeiros termos,

$$J \approx S_1 = \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 2^7} = \frac{1}{24} - \frac{1}{2688} \approx 0,0412946429.$$

O erro é limitado pelo primeiro termo omitido:

$$|J - S_1| \leq \frac{1}{5 \cdot 11 \cdot 2^{11}} < 8,88 \cdot 10^{-6}.$$

Como esse termo é positivo,

$$0,0412946 < J < 0,0413036.$$

Todos os valores nesse intervalo arredondam para $0,0413$*. Logo,*

$$\boxed{J \approx 0,0413.}$$

6 Série binomial

6.1 Potências com expoente real

Para qualquer número real $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|x| < 1$, a função $f(x) = (1+x)^\alpha$ pode ser expandida em uma série de potências da seguinte forma:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Onde $\binom{\alpha}{n}$ representa o **coeficiente binomial generalizado**, definido matematicamente para $n \geq 1$ como:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Para $n = 0$, define-se $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Se α é inteiro não negativo, a expansão termina e é um polinômio válido para todo x. Nos demais casos,

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} \right| = \frac{|\alpha - n|}{n+1}|x| \longrightarrow |x|.$$

Assim, o raio é 1. As extremidades exigem estudo separado; para as aplicações centrais usaremos $|x| < 1$.

Exemplo 9. *Para* $\alpha = 1/2$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Em $x = 0,04$, $P_2 = 1 + 0,02 - 0,0002 = 1,0198$. *Como* $f'''(t) = \frac{3}{8}(1+t)^{-5/2} \leq 3/8$ *para* $0 \leq t \leq 0,04$,

$$|\sqrt{1,04} - 1,0198| \leq \frac{3/8}{3!}(0,04)^3 = 4 \cdot 10^{-6}.$$

Escolha de escala. Para aproximar $\sqrt{101}$, escrever $10\sqrt{1+0,01}$. O pequeno parâmetro é $0,01$, e não 101. Ao multiplicar a aproximação por 10, a cota do erro também é multiplicada por 10.

Exemplo 10. *Com* $\alpha = -1/2$ *e substituição de* x *por* $-t^2$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} t^{2n}, \qquad |t| < 1.$$

Integrando de 0 a x,

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

A integração é permitida porque o segmento entre 0 e x *está dentro do intervalo de convergência.*

6.2 Exercícios

1. Obtenha os termos até grau 3 de $(1+x)^{-2}$ e determine o intervalo de convergência da série completa.
2. Aproxime $\sqrt{101}$ pelo polinômio quadrático e forneça uma cota do erro.