

# Séries Numéricas

## Sumário

|          |                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Séries numéricas: fundamentos básicos</b>          | <b>2</b>  |
| 1.1      | De sequências para séries . . . . .                   | 2         |
| 1.2      | A série geométrica . . . . .                          | 3         |
| 1.3      | Uma condição necessária para a convergência . . . . . | 3         |
| 1.4      | Séries telescópicas . . . . .                         | 4         |
| <b>2</b> | <b>Séries de termos positivos</b>                     | <b>5</b>  |
| 2.1      | Critério da comparação . . . . .                      | 5         |
| 2.2      | Teste da Integral . . . . .                           | 6         |
| 2.2.1    | A família das séries $p$ . . . . .                    | 7         |
| <b>3</b> | <b>Séries alternadas e o critério de Leibniz</b>      | <b>9</b>  |
| 3.1      | O critério de Leibniz . . . . .                       | 9         |
| 3.2      | Erro da soma parcial . . . . .                        | 10        |
| <b>4</b> | <b>Convergência absoluta e condicional</b>            | <b>11</b> |
| 4.1      | Como classificar uma série . . . . .                  | 12        |
| <b>5</b> | <b>Testes da razão e da raiz</b>                      | <b>13</b> |
| 5.1      | Teste da razão . . . . .                              | 13        |
| 5.2      | O caso $L = 1$ . . . . .                              | 14        |
| 5.3      | Teste da raiz . . . . .                               | 14        |
| 5.4      | Razão ou raiz? . . . . .                              | 15        |
| 5.5      | Resumo dos testes . . . . .                           | 15        |
| <b>6</b> | <b>Estratégia para estudar uma série</b>              | <b>15</b> |

# 1 Séries numéricas: fundamentos básicos

## 1.1 De sequências para séries

Até agora estudamos sequências de números reais,

$$(a_n)_{n \geq 1}.$$

Uma pergunta natural é: o que acontece quando queremos somar os termos de uma sequência?

Por exemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

ou

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots.$$

Como estamos lidando com uma soma com infinitos termos, precisamos definir cuidadosamente o que significa essa soma.

**Definição 1.** Dada uma sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  de números reais, a expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é chamada de **série numérica**.

Para dar significado a esta “soma infinita”, consideramos as somas parciais.

**Definição 2.** A  $N$ -ésima soma parcial da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é definida por

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Assim,  $(S_N)_{N \geq 1}$  é uma sequência.

**Exemplo 1.** Considere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

As primeiras somas parciais são

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

e, em geral,

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^N}.$$

A ideia fundamental é que uma série é estudada por meio da sequência de suas somas parciais.

**Definição 3.** Dizemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**converge** se a sequência de somas parciais  $(S_N)_{N \geq 1}$  converge para algum número real  $S$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S.$$

Nesse caso, escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Caso  $(S_N)$  não seja convergente, dizemos que a série **diverge**.

## 1.2 A série geométrica

A série geométrica é um dos exemplos fundamentais de séries numéricas.

**Teorema.** Se  $|r| < 1$ , então

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Se  $|r| \geq 1$  e  $a \neq 0$ , a série diverge.

**Exemplo 2.** Considere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Temos  $a = 1$  e  $r = \frac{1}{2}$ . Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

**Exemplo 3.** Considere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}.$$

Escrevendo

$$\frac{3}{4^n} = 3 \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 3 \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 1.$$

## 1.3 Uma condição necessária para a convergência

Existe uma condição muito simples que toda série convergente deve satisfazer.

**Teorema.**

$$\text{Se } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge, então } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

*Demonstração.* Se a série converge, então

$$S_N \rightarrow S.$$

Como

$$a_N = S_N - S_{N-1},$$

temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N - S_{N-1}) = S - S = 0.$$

□

Este resultado nos fornece o primeiro critério de divergência.

**Exemplo 4.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + ne^{-n}) \quad \text{é divergente pois} \quad a_n = 1 + ne^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0.$$

**Observação 1.** A condição

$$a_n \rightarrow 0$$

é **necessária**, mas não é suficiente para a convergência da série.

**Exemplo 5.** A série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge (veremos o porquê em breve), embora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

## 1.4 Séries telescópicas

Algumas séries podem ser simplificadas por cancelamentos sucessivos.

**Exemplo 6.** Considere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Usando frações parciais,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1,$$

e assim

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.}$$

Em geral, séries telescópicas são da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$$

## Exercícios

1. Determine quais das séries abaixo são geométricas e calcule sua soma quando possível:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n.$$

2. Verifique se a condição necessária  $a_n \rightarrow 0$  é satisfeita para

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

3. Calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

## 2 Séries de termos positivos

Nesta seção estudaremos séries cujos termos são não negativos. Nesse caso, a sequência das somas parciais possui uma propriedade importante.

**Definição 4.** *Uma série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*é chamada de **série de termos positivos** quando*

$$a_n \geq 0 \quad \text{para todo } n.$$

Se  $a_n \geq 0$ , então a sequência das somas parciais

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

é **crescente**. De fato,

$$S_{N+1} - S_N = a_{N+1} \geq 0.$$

Consequentemente, uma série de termos positivos converge exatamente quando sua sequência de somas parciais é limitada superiormente.

### 2.1 Critério da comparação

A ideia mais simples para estudar uma série de termos positivos é compará-la com uma série cuja convergência já conhecemos.

**Teorema 1** (Critério da Comparação). *Suponha que*

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

*para todo  $n$  suficientemente grande. Neste caso,*

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge}.$$

**Exemplo 7.** *Considere a série harmônica*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

*e suas somas parciais*

$$S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

Para estudar o comportamento dessas somas parciais, consideremos a subsequência  $S_{2^N}$ .

Temos

$$S_{2^N} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right).$$

Como  $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1}$  para todo natural  $k \geq 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} S_{2^N} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^N} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^N} \\ &= 1 + \frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Como

$$1 + \frac{N}{2} \longrightarrow \infty,$$

quando  $N \rightarrow \infty$ , temos

$$S_{2^N} \longrightarrow \infty.$$

Logo, a sequência das somas parciais  $(S_N)$  não é limitada e, portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ diverge.}$$

## 2.2 Teste da Integral

O teste da integral relaciona a convergência de uma série de termos positivos com a convergência de uma integral imprópria.

**Teorema 2** (Teste da Integral). *Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uma série de termos positivos. Suponha que exista uma função  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(n) = a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e que  $f$  seja contínua, positiva e decrescente em  $[1, \infty)$ . Então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

*Em outras palavras, a série e a integral têm o mesmo comportamento quanto à convergência.*

### Ideia do teste

Como  $f$  é positiva e decrescente, para cada  $n$  temos

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n), \quad n \leq x \leq n+1.$$

Integrando em  $[n, n+1]$ , obtemos

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

Somando essas desigualdades para  $n = 1, \dots, N$ , temos

$$\sum_{n=1}^N f(n+1) \leq \int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N f(n).$$

Portanto,

$$\sum_{n=2}^{N+1} f(n) \leq \int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N f(n).$$

Essas desigualdades mostram que o comportamento da integral e da série está intimamente relacionado.

**Exemplo 8. (A série harmônica)** Considere novamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Tomamos

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

A função  $f$  é positiva, contínua e decrescente em  $[1, \infty)$ .

Pelo Teste da Integral, devemos estudar

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx.$$

Temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln x]_1^R.$$

Assim,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = \infty.$$

Logo, pelo Teste da Integral,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}}$$

### 2.2.1 A família das séries $p$

O Teste da Integral é particularmente útil quando a função  $f(x)$  possui uma integral imprópria fácil de calcular.

Considere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Tomando

$$f(x) = \frac{1}{x^p},$$

temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx.$$

Se  $p \neq 1$ ,

$$\int_1^R \frac{1}{x^p} dx = \frac{R^{1-p} - 1}{1-p}.$$

Se  $p > 1$ , então

$$1 - p < 0$$

e

$$R^{1-p} \longrightarrow 0.$$

Logo, a integral converge.

Se  $p < 1$ , então

$$1 - p > 0$$

e

$$R^{1-p} \longrightarrow \infty.$$

Logo, a integral diverge.

Para  $p = 1$ ,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge,} & p > 1, \\ \text{diverge,} & p \leq 1. \end{cases}$$

**Exemplo 9.** *Considere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Para  $n \geq 1$ ,

$$n^2 + 1 \leq 2n^2.$$

Logo,

$$\frac{n}{n^2 + 1} \geq \frac{1}{2n}.$$

Como a série harmônica diverge,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \text{ diverge.}$$

**Exemplo 10.** *Considere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Para todo  $n$ ,

$$0 \leq \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, segue pelo critério da comparação que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \text{ converge.}$$

## Estratégia

Ao estudar uma série de termos positivos, pergunte:

1. Existe uma série conhecida que seja maior ou menor que a série dada?
2. Posso compará-la com uma série geométrica?
3. Posso compará-la com uma  $p$ -série?

## 3 Séries alternadas e o critério de Leibniz

Agora estudaremos séries cujos termos alternam de sinal.

**Definição 5.** Uma série é chamada de **série alternada** quando seus termos alternam entre valores positivos e negativos. Uma forma típica é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n \geq 0.$$

**Exemplo 11.** A série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

### 3.1 O critério de Leibniz

Até agora vimos testes para séries com termos positivos. O critério de Leibniz nos fornece um critério de convergência para séries com termos positivos e negativos. O critério também é chamado de teste da série alternada.

**Teorema 3** (Critério de Leibniz). Considere  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ , onde  $a_n \geq 0$ . Se

1.  $a_n \rightarrow 0$  e,
2.  $a_{n+1} \leq a_n$  para  $n$  suficientemente grande

então a série converge.

**Exemplo 12.** Considere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Temos

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

e

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

o critério de Leibniz garante que a série converge.

**Exemplo 13.** *Considere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 3}.$$

*Aqui*

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 3}.$$

*Note que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3} = 1 \neq 0.$$

*Portanto, a condição necessária para a convergência de uma série não é satisfeita. Logo, a série diverge.*

**Esboço da demonstração do Critério de Leibniz.** Considere a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

onde  $(a_n)$  é uma sequência de termos não negativos, decrescente e tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Considere as somas parciais pares e ímpares:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n},$$

$$S_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Como  $(a_n)$  é não-crescente,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0,$$

de modo que  $(S_{2n})$  é não-decrescente. Além disso,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \geq 0,$$

e, portanto,  $S_{2n+1} \geq S_{2n}$ .

Por outro lado,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \leq 0,$$

de modo que  $(S_{2n+1})$  é não-crescente.

Assim, temos

$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots S_{2n+1} \leq \cdots S_3 \leq S_1$$

e ambas as sequências são monótonas e limitadas. Logo, convergem. Como

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [S_{2n+1} - S_{2n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0,$$

segue que a sequência das somas parciais  $(S_n)$  converge, e portanto, a série é convergente. □

### 3.2 Erro da soma parcial

Uma vantagem do critério de Leibniz é que ele também fornece uma estimativa para o erro.

**Teorema.** *Se*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

*satisfaz as hipóteses do critério de Leibniz, então*

$$\boxed{|S - S_N| \leq a_{N+1}}.$$

Assim, podemos aproximar a soma de uma série alternada com um erro controlado.

**Exemplo 14.** *Considere*

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

*Se usamos apenas os primeiros  $N$  termos, então*

$$|S - S_N| \leq \frac{1}{N+1}.$$

*Para garantir um erro menor que 0,01, basta escolher  $N$  tal que*

$$\frac{1}{N+1} < 0,01.$$

*Por exemplo,  $N = 100$ .*

## 4 Convergência absoluta e condicional

As séries alternadas levantam uma questão importante: uma série pode convergir por causa do cancelamento entre termos positivos e negativos, mesmo quando a série dos valores absolutos diverge?

A resposta é sim.

**Definição 6.** *Uma série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*é chamada de **absolutamente convergente** se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

*converge.*

**Teorema.** *Se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

*converge, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*também converge.*

*Demonstração.* Para cada  $n$ ,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|.$$

Como

$$\sum |a_n|$$

converge, suas somas parciais são limitadas. A comparação com as partes positiva e negativa implica que as somas parciais de  $\sum a_n$  formam uma sequência de Cauchy e, portanto, convergem.  $\square$

**Observação 2.** *Convergência absoluta é uma condição mais forte que convergência:*

$$\boxed{\text{convergência absoluta} \implies \text{convergência.}}$$

*A recíproca, em geral, é falsa.*

**Definição 7.** *Uma série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*é chamada de **condicionalmente convergente** quando*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*converge, mas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

*diverge.*

**Exemplo 15.** *Considere a série harmônica alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

*Pelo critério de Leibniz, ela converge.*

*Por outro lado,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

*que diverge.*

*Portanto,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \text{ é condicionalmente convergente.}$$

**Exemplo 16.** *Considere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

*Temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

*que converge.*

*Logo,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \text{ converge absolutamente.}$$

## 4.1 Como classificar uma série

Dada uma série

$$\sum a_n,$$

podemos seguir o seguinte procedimento:

1. Primeiro, verificar se

$$\sum |a_n|$$

converge.

2. Se convergir, então  $\sum a_n$  é absolutamente convergente.

3. Se  $\sum |a_n|$  divergir, ainda podemos verificar se  $\sum a_n$  converge por outro critério, por exemplo, Leibniz.

4. Se  $\sum a_n$  convergir mas  $\sum |a_n|$  divergir, a convergência é condicional.

$$\begin{array}{c} \sum a_n \\ \downarrow \\ \sum |a_n| \text{ converge?} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{sim} & \Rightarrow \text{convergência absoluta} \\ \text{não} & \Rightarrow \text{procurar outro critério} \end{array} \right. \end{array}$$

## 5 Testes da razão e da raiz

Quando a comparação direta não é conveniente, podemos usar critérios baseados no crescimento relativo dos termos.

### 5.1 Teste da razão

**Teorema** (Teste da Razão). *Considere uma série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e suponha que exista o limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Então:

1. Se  $L < 1$ , a série converge absolutamente.
2. Se  $L > 1$  (ou  $L = \infty$ ), a série diverge.
3. Se  $L = 1$ , o teste é inconclusivo.

**Exemplo 17.** *Considere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Temos

$$a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} \\ &= \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \text{ converge absolutamente.}$$

**Exemplo 18.** *Considere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}.$$

*Temos*

$$a_n = \frac{n!}{2^n}.$$

*Assim,*

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n!} \\ &= \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

*Logo,*

$$L = \infty > 1.$$

*Portanto, a série diverge.*

**Observação 3.** *O teste da razão é especialmente útil quando aparecem:*

$$n!, \quad c^n, \quad \text{produtos de muitos fatores,}$$

*ou combinações dessas expressões.*

## 5.2 O caso $L = 1$

Quando

$$L = 1,$$

o teste da razão não permite concluir nada.

**Exemplo 19.** *Para a série harmônica,*

$$a_n = \frac{1}{n},$$

*temos*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

*Entretanto,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

*diverge.*

*Por outro lado,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

*converge, e também apresenta limite da razão igual a 1.*

*Portanto,*

$$\boxed{L = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{o teste é inconclusivo.}}$$

## 5.3 Teste da raiz

**Teorema** (Teste da Raiz). *Considere uma série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*e suponha que exista o limite*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

*Então:*

1. Se  $L < 1$ , a série converge absolutamente.
2. Se  $L > 1$ , a série diverge.
3. Se  $L = 1$ , o teste é inconclusivo.

**Exemplo 20.** Considere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^n.$$

Temos

$$a_n = \left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^n.$$

Então

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+1}{3n+1}.$$

Logo,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^n \text{ converge absolutamente.}$$

**Exemplo 21.** Considere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Temos

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

Assim, o teste da raiz é inconclusivo. É necessário utilizar outro argumento.

## 5.4 Razão ou raiz?

Os dois testes são muito semelhantes, mas algumas formas são mais naturais para um deles.

| Forma da série                     | Teste frequentemente conveniente |
|------------------------------------|----------------------------------|
| Fatoriais                          | Razão                            |
| Exponenciais                       | Razão                            |
| Produtos sucessivos                | Razão                            |
| $(b_n)^n$                          | Raiz                             |
| Expressões elevadas à potência $n$ | Raiz                             |

## 5.5 Resumo dos testes

| Limite  | Razão                  | Raiz                   |
|---------|------------------------|------------------------|
| $L < 1$ | converge absolutamente | converge absolutamente |
| $L > 1$ | diverge                | diverge                |
| $L = 1$ | inconclusivo           | inconclusivo           |

## 6 Estratégia para estudar uma série

Dada uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

não existe um único teste que funcione para todas as séries. O primeiro passo deve ser observar a forma dos termos.

## Um possível roteiro

1. **Verifique a condição necessária:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Se esse limite não for zero, a série diverge imediatamente.

2. **A série é geométrica?**

Se sim, use a fórmula da série geométrica.

3. **Os termos são não negativos?**

Tente comparação com uma série geométrica ou uma  $p$ -série.

4. **Os sinais alternam?**

Verifique se o critério de Leibniz pode ser aplicado.

5. **A série pode ser absolutamente convergente?**

Estude

$$\sum |a_n|.$$

6. **Aparecem fatoriais, exponenciais ou potências complicadas?**

Considere o teste da razão ou o teste da raiz.

Identificar a estrutura da série é parte essencial da solução.