

**Lista 1 - Sequências**

1. Classifique as seguintes sequências quanto à limitação e monotonicidade. Justifique sua resposta.

(a)  $a_n = \frac{1}{n}$

(b)  $a_n = (-1)^n$

(c)  $a_n = \frac{n!}{2^n}$

(d)  $a_n = \frac{n}{n+1}$

2. Determine os limites a seguir, quando existirem. Caso contrário, justifique por que a sequência é divergente.

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1}{2n^3-5}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+n}}$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

(f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n^2)}{n}$

3. Considere a sequência

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}.$$

Sabendo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , determine um natural  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$|a_n - 1| < 0,03$$

para todo  $n \geq N$ .

4. Mostre que se  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

5. Encontre uma subsequência de

$$a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

que seja:

(a) convergente.

(b) divergente.

6. Considere a sequência  $(a_n)$  definida por

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 1.$$

Analise separadamente os casos em que

$$a_1 = 1 \quad \text{e} \quad a_1 = 3.$$

- (a) No caso  $a_1 = 1$ , utilize indução para mostrar que

$$a_n < 2, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Em seguida, mostre que a sequência é monótona crescente.

- (b) No caso  $a_1 = 3$ , utilize indução para mostrar que

$$a_n > 2, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Em seguida, mostre que a sequência é monótona decrescente.

- (c) Conclua, em ambos os casos, que a sequência é convergente e calcule o seu limite.

7. Considere uma população cuja evolução ao longo do tempo é modelada pela sequência

$$P_{n+1} = (1 + r)P_n, \quad P_0 > 0,$$

onde  $P_0$  representa a população inicial e  $r$  representa a taxa de crescimento da população por período.

- (a) Determine os valores de  $r$  para os quais a sequência  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é: crescente, decrescente ou constante.  
 (b) Para quais valores de  $r$  a população tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ ?  
 (c) Para quais valores de  $r$  a população cresce indefinidamente?  
 (d) Por que para  $r < -1$  a sequência deixa de interpretar um modelo populacional ?
8. (Estabilidade de um sistema elétrico)

Em um determinado sistema de controle, o erro  $e_n$  após a  $n$ -ésima etapa é modelado pela sequência

$$e_{n+1} = \alpha e_n, \quad e_0 \neq 0,$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  depende dos parâmetros do sistema.

O sistema é considerado **estável** quando o erro tende a zero ao longo das etapas.

- (a) Determine os valores de  $\alpha$  para os quais o sistema é estável.  
 (b) O que acontece quando  $\alpha = 1$ ?  
 (c) O que acontece quando  $\alpha = -1$ ?
9. Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sequências tais que

$$x_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 1.$$

Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{a}.$$

10. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

onde  $e$  é o número de Euler.

**Dica:** Mostre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  e utilize o fato de que,

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{então} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L.$$