

Sequências

Thialita Nascimento

Sumário

1	Introdução à sequências	1
2	Limite de uma sequência	5
3	Cálculo de limites	7
4	Propriedades das sequências convergentes	9
5	Critérios de convergência	11

1 Introdução à sequências

Uma sequência é uma lista ordenada de números que pode ser finita ou infinita. Por exemplo,

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

e

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

são sequências.

Um exemplo especialmente interessante é a **sequência de Fibonacci**:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Como podemos descrever o padrão dessas sequências? Será possível prever seus próximos termos?

Definição 1. Uma *sequência* de números reais é uma função

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Escrevemos

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

para representar a sequência.

O número a_n é chamado de **n -ésimo termo** da sequência.

Exemplo 1. Considere

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Então

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4}, \dots$$

Sequências explícitas e recursivas

Uma sequência pode ser definida diretamente por uma fórmula.

Exemplo 2.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Também podemos definir uma sequência por uma relação de recorrência.

Exemplo 3. *Considere*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2.$$

Então

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

A sequência de Fibonacci é outro exemplo de sequência definida recursivamente:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Subsequências

Considere uma sequência

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Se selecionarmos infinitos termos dessa sequência, mantendo a ordem original, obtemos uma **subsequência**.

Mais precisamente,

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots, a_{n_k}, \dots$$

então

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

é uma subsequência de (a_n) . Notação: $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, onde $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.

Exemplo 4. *Considere*

$$a_n = 2n - 1.$$

Então

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

é a sequência dos números ímpares.

Podemos tomar as seguintes subsequências:

$$3, 7, 11, 15, \dots \quad e \quad 3, 9, 15, 21, \dots$$

que correspondem às subsequências

$$(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}} \quad e \quad (a_{2+3(k-1)})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Sequências limitadas

Definição 2. *Uma sequência (a_n) é **limitada inferiormente** se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$m \leq a_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Definição 3. *Uma sequência (a_n) é **limitada superiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a_n \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

Definição 4. Uma sequência (a_n) é **limitada** se for limitada superiormente e inferiormente. Isto é existem números reais m e M tais que

$$m \leq a_n \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

Equivalentemente, uma sequência é limitada se existe $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

Exemplo 5. Considere

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Como

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \quad \forall n \geq 1,$$

a sequência é limitada.

Exemplo 6. A sequência

$$a_n = 2n - 1$$

não é limitada superiormente.

De fato, seus termos crescem indefinidamente:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

Definição 5. Seja (a_n) uma sequência limitada superiormente. Um número $S \in \mathbb{R}$ é chamado de **supremo** do conjunto dos termos da sequência se:

- (i) $a_n \leq S$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) se $L < S$ não é uma cota superior da sequência.

Denotamos

$$S = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 6. Seja (a_n) uma sequência limitada inferiormente. Um número $\iota \in \mathbb{R}$ é chamado de **ínfimo** do conjunto dos termos da sequência se:

- (i) $\iota \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) se $m > \iota$ não é uma cota inferior da sequência.

Denotamos

$$\iota = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Exemplo 7. Considere a sequência

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Seus primeiros termos são

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$$

Temos

$$0 \leq a_n < 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

e

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

Observe que 1 é o supremo, embora não seja um termo da sequência.

Sequências monótonas

Definição 7. Uma sequência $\{a_n\}$ é

- **não-decrescente** se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n .
- **crescente** se $a_{n+1} > a_n$, para todo n .
- **não-crescente** se $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n .
- **decrescente** se $a_{n+1} < a_n$.

Uma sequência crescente ou decrescente é chamada de **monótona**.

Exemplo 8.

- $a_n = \left\lfloor \frac{10}{n} \right\rfloor$ é não-crescente.
- $a_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ é não-decrescente.

Uma maneira útil de verificar a monotonicidade é estudar o sinal de

$$a_{n+1} - a_n.$$

Se

$$a_{n+1} - a_n \geq 0,$$

a sequência é não-decrescente. Se

$$a_{n+1} - a_n \leq 0,$$

a sequência é não-crescente.

Exemplo 9. Considere

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Temos

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Logo, $\{a_n\}$ é crescente.

Indução matemática

O princípio da indução matemática é uma ferramenta fundamental para provar que uma afirmação é verdadeira para todos os números naturais.

Teorema. Suponha que $P(n)$ seja uma afirmação definida para todo $n \geq n_0$. Se:

1. $P(n_0)$ é verdadeira;
 2. para algum $k \geq n_0$, $P(k)$ verdadeira implica $P(k+1)$ verdadeira,
- então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Exemplo

Prove que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Base: para $n = 1$,

$$1 = \frac{1(2)}{2}.$$

Hipótese de indução: suponha que

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Passo indutivo:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Indução e sequências

A indução é particularmente útil para demonstrar propriedades de sequências definidas recursivamente.

Exemplo 10. Considere

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{2}.$$

Mostre que

$$a_n \leq 2$$

para todo n .

Base:

$$a_1 = 1 \leq 2.$$

Hipótese: suponha que $a_k \leq 2$.

Então

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 2}{2} \leq \frac{2 + 2}{2} = 2.$$

Logo,

$$a_n \leq 2$$

para todo n .

2 Limite de uma sequência

Uma das perguntas fundamentais que estudaremos é:

O que acontece com os termos de uma sequência quando n cresce?

Sequências convergentes

Definição 8. Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é **convergente** quando existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$n \geq N \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

Nesse caso, dizemos que a sequência converge para L e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

ou simplesmente

$$a_n \longrightarrow L.$$

Caso não exista $L \in \mathbb{R}$ com essa propriedade, dizemos que a sequência é **divergente**.

Intuitivamente, os termos de uma sequência convergente podem ser tornados arbitrariamente próximos de L , desde que n seja suficientemente grande.

Exemplo 11. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pelo Princípio Arquimedeano, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Então, para todo $n \geq N$,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Exemplo 12. A sequência

$$a_n = 2n$$

é divergente.

De fato, seus termos crescem indefinidamente:

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

Esse comportamento é descrito pela noção de limite infinito.

Limites infinitos

Dizemos que

$$a_n \longrightarrow +\infty$$

quando, para todo $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies a_n > M.$$

Analogamente,

$$a_n \longrightarrow -\infty$$

quando, para todo $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies a_n < -M.$$

Exemplo 13. Temos

$$n \longrightarrow +\infty, \quad e \quad -n \longrightarrow -\infty.$$

3 Cálculo de limites

Depois de determinar que uma sequência converge, podemos utilizar propriedades dos limites para calcular seu limite.

Álgebra dos limites

Teorema 1. Se

$$a_n \longrightarrow L \quad e \quad b_n \longrightarrow M,$$

então:

$$1. \ a_n + b_n \longrightarrow L + M;$$

“

2.

$$a_n - b_n \longrightarrow L - M;$$

3. para todo $c \in \mathbb{R}$,

$$ca_n \longrightarrow cL;$$

4.

$$a_n b_n \longrightarrow LM;$$

5. se $M \neq 0$, então

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{L}{M}.$$

6. se $p > 0$ e $a_n \geq 0$ para toda $n \geq 1$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = L^p.$$

Essas propriedades nos permitem manipular limites de maneira semelhante às operações algébricas usuais.

Exemplo 14. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}.$$

Dividindo numerador e denominador por n ,

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Como

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Exemplo 15. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3}.$$

Dividindo numerador e denominador por n^2 ,

$$\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}}.$$

Como

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0,$$

segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} = 2.$$

Critério usando limites de funções

Teorema 2. Seja $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

Então, a sequência (a_n) , definida por

$$a_n = f(n),$$

é convergente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Esse resultado permite utilizar limites de funções para calcular limites de sequências.

Exemplo 16. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

Considere

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

segue que a sequência

$$a_n = f(n) = \frac{\ln n}{n}$$

também converge para 0. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

4 Propriedades das seqüências convergentes

Agora veremos algumas consequências importantes da convergência.

Seqüências convergentes são limitadas

Teorema 3. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Demonstração. Suponha que

$$a_n \longrightarrow L.$$

Tomando $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |a_n - L| < 1.$$

Assim,

$$|a_n| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|,$$

para todo $n \geq N$.

Os primeiros termos

$$a_1, \dots, a_{N-1}$$

formam um conjunto finito e, portanto, também são limitados. Logo, toda a seqüência é limitada. $\square$

A recíproca, entretanto, não é verdadeira.

Exemplo 17. *A seqüência*

$$a_n = (-1)^n$$

é limitada, pois

$$-1 \leq a_n \leq 1,$$

mas é divergente.

Subseqüências

Uma propriedade fundamental é que uma subseqüência de uma seqüência convergente possui o mesmo limite.

Teorema 4. *Se*

$$a_n \longrightarrow L$$

e (a_{n_k}) é uma subseqüência de (a_n) , então

$$a_{n_k} \longrightarrow L.$$

Esse resultado fornece uma ferramenta importante para detectar divergência.

Exemplo 18. *Considere novamente*

$$a_n = (-1)^n.$$

A subsequência dos termos pares é

$$a_{2n} = 1,$$

portanto,

$$a_{2n} \longrightarrow 1.$$

Já a subsequência dos termos ímpares é

$$a_{2n-1} = -1,$$

e, portanto,

$$a_{2n-1} \longrightarrow -1.$$

Como essas duas subsequências possuem limites diferentes, a sequência original não pode convergir. Logo,

$$\boxed{(-1)^n \text{ é divergente.}}$$

Deslocamento dos índices

Teorema 5. *Se*

$$a_n \longrightarrow L,$$

então, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+p} \longrightarrow L.$$

Em outras palavras, deslocar os índices ou remover uma quantidade finita de termos iniciais não altera o limite de uma sequência.

Exemplo 19 (A razão entre termos consecutivos de Fibonacci). *Considere a sequência de Fibonacci*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

e defina

$$r_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Então,

$$r_n = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

Suponhamos que

$$r_n \longrightarrow r.$$

Pelo teorema anterior,

$$r_{n-1} \longrightarrow r.$$

Passando ao limite na relação

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}},$$

obtemos

$$r = 1 + \frac{1}{r}.$$

Assim,

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

e, como $r > 0$,

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, caso a sequência (r_n) seja convergente, seu único possível limite positivo é a razão áurea.

Observação: encontrar um possível limite não é o mesmo que provar que o limite existe!

5 Critérios de convergência

Como podemos garantir que uma sequência converge?

Teorema do Sanduíche

O Teorema do Sanduíche permite determinar o limite de uma sequência que está limitada entre duas outras sequências com o mesmo limite.

Teorema 6 (Teorema do Sanduíche). *Suponha que, para n suficientemente grande,*

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L,$$

então

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.}$$

A ideia é simples: se b_n está sempre entre duas sequências que se aproximam do mesmo número L , então b_n também é forçada a se aproximar de L .

Exemplo 20. *Calcule*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}.$$

Como

$$-1 \leq \sin n \leq 1,$$

temos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pelo Teorema do Sanduíche,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.}$$

Aqui usamos o seguinte fato:

Teorema 7. (Preservação de desigualdades pelo limite) *Sejam (a_n) e (b_n) sequências tais que*

$$a_n \leq b_n$$

para todo n suficientemente grande. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b,$$

então

$$\boxed{a \leq b.}$$

Em particular, se $a_n \leq c$ para todo n suficientemente grande e $a_n \rightarrow a$, então

$$a \leq c.$$

Exemplo 21. *Calcule*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Como

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1,$$

segue que

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Como os extremos convergem para 0, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

O critério do limite zero

O Teorema do Sanduíche fornece um resultado muito útil quando multiplicamos uma sequência que converge para zero por uma sequência limitada.

Teorema 8 (Critério do limite zero). *Se*

$$a_n \longrightarrow 0$$

e a sequência (b_n) é limitada, então

$$a_n b_n \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Como (b_n) é limitada, existe $M > 0$ tal que

$$|b_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq M |a_n|.$$

Como

$$a_n \longrightarrow 0,$$

temos

$$M |a_n| \longrightarrow 0.$$

Assim,

$$-M |a_n| \leq a_n b_n \leq M |a_n|.$$

Pelo Teorema do Sanduíche,

$$a_n b_n \longrightarrow 0.$$

□

Exemplo 22. *Calcule*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}.$$

Podemos escrever

$$\frac{\sin n}{n} = \frac{1}{n} \sin n.$$

Como

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

e

$$|\sin n| \leq 1,$$

a sequência $(\sin n)$ é limitada.

Portanto, pelo critério do limite zero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Esse exemplo mostra que uma mesma sequência pode ter seu limite calculado utilizando ferramentas diferentes.

A monotonicidade, sozinha, não garante a convergência.

Por exemplo,

$$a_n = n$$

é crescente, mas

$$a_n \rightarrow +\infty.$$

Entretanto, quando combinamos monotonicidade com limitação, obtemos um importante critério de convergência.

Teorema 9 (Teorema da Convergência Monótona). *Se (a_n) é monótona e limitada então (a_n) é convergente.*

crescente + limitada superiormente $\Downarrow$ convergente

decrescente + limitada inferiormente $\Downarrow$ convergente

Exemplo 23. *Considere a sequência*

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Temos

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{4}, \dots$$

A sequência é crescente e satisfaz

$$a_n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, (a_n) é crescente e limitada superiormente. Pelo Teorema da Convergência Monótona, ela converge.

De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Aplicação a sequências recursivas

O Teorema da Convergência Monótona é particularmente útil para sequências definidas por recorrência.

A estratégia geralmente é:

1. mostrar que a sequência é limitada;
2. mostrar que a sequência é monótona;
3. concluir que a sequência converge;
4. utilizar a relação de recorrência para determinar o limite.

Exemplo 24. Considere a sequência definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{2}.$$

Vamos mostrar que (a_n) converge e determinar seu limite.

Primeiramente, mostraremos que

$$a_n \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, temos $a_1 = 1 \leq 2$. Se $a_n \leq 2$, então

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{2} \leq \frac{2 + 2}{2} = 2.$$

Portanto, por indução,

$$a_n \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 2}{2} - a_n = \frac{2 - a_n}{2}.$$

Como $a_n \leq 2$, temos

$$a_{n+1} - a_n \geq 0.$$

Logo, (a_n) é crescente.

Assim, (a_n) é crescente e limitada superiormente. Pelo Teorema da Convergência Monótona, existe

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Como

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{2},$$

passando ao limite, obtemos

$$L = \frac{L + 2}{2}.$$

Portanto,

$$2L = L + 2,$$

e, consequentemente,

$$\boxed{L = 2.}$$

Logo,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.}$$

Um roteiro para analisar sequências

Ao encontrar uma nova sequência, algumas perguntas podem ajudar:

1. A sequência possui uma fórmula explícita que permite calcular diretamente o limite?
2. Ela pode ser escrita como produto de uma sequência que converge para zero por uma sequência limitada?
3. Ela está limitada entre duas sequências com o mesmo limite?
4. Ela é monótona e limitada?
5. Ela é definida recursivamente? Nesse caso, podemos usar a monotonicidade e a limitação para provar sua convergência? ““

Essas perguntas não substituem uma demonstração, mas ajudam a escolher a ferramenta adequada.