Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de soluções para equações elípticas semilineares envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas

Rosinângela Cavalcanti da Silva

Julho de 2012

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de soluções para equações elípticas semilineares envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas

por

Rosinângela Cavalcanti da Silva

sob orientação de

Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho de 2012
João Pessoa-PB

S586e Silva, Rosinângela Cavalcanti da.
Existência de soluções para equações elípticas semilineares envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas / Rosinângela Cavalcanti da Silva.- João Pessoa, 2012.
88f.

Orientadora: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Equações semilineares. 3. Não linearidades côncavo-convexas. 4. Multiplicadores de Lagrange. 5. Variedade de Nehari. 6. Sub e supersolução.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Existência de soluções para equações elípticas semilineares envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas

por

Rosinângela Cavalcanti da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovado pela Banca:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Profª. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes(Orientadora)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Janete Soares de Gamboa

Profª. Dra. Janete Soares de Gamboa

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza(Suplente)

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Julho de 2012

Aos meus pais e minhas irmãs.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado Sabedoria para conquistar meu sonho. Agradeço aos meus pais por terem acreditado em mim, por todo apoio, carinho e pelas palavras de força. Agradeço a minhas irmãs Ednângela e Marinângela por terem me aguentado horas ao telefone para matar a saudade e por estarem ao meu lado sempre. Ao meu cunhado Diogo por tudo que fez por mim. Agradeço ao meu namorado Rubens pelo seu carinho e dedicação, por ter me dado força e conselhos que nunca vou esquecer. Agradeço a minha amiga Pammella por tantas noites de estudos juntas, por secar minhas lágrimas quando a saudade e a angústia chegavam e por tantos risos. Agradeço a família Queiroz em nome de Dona Fátima, por ter me acolhido como filha. Agradeço a todos os meus professores e a minha orientadora e amiga Elisandra pela sua paciência, dedicação e pela força que me deu durante todo esse tempo de estudos.

Resumo

O objetivo da nossa dissertação é provar a existência de soluções para uma classe de equações elípticas semilineares em um domínio limitado, envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas. Mostraremos alguns casos diferentes e métodos diversificados para encontrar tais soluções, usando o Teorema do Passo da Montanha, o Princípio Variacional de Ekeland, Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, a Variedade de Nehari e sub e supersolução.

Palavras-chave: Equações semilineares, não linearidades côncavo-convexas, Multiplicadores de Lagrange, Variedade de Nehari, sub e supersolução.

Abstract

The aim of our dissertation is to prove the existence of solutions for a class of semilinear elliptic equations in a limited domain, involving non-linearities of the concave-convex type. We showed some different cases and diverse methods to find such solutions, using the Mountain Pass Theorem, the Ekeland Variational Principle, the Lagrange Multipliers Theorem, the Nehari Manifold and sub and supersolution.

Keywords: Semilinear Equations, non-linearities of the concave-convex type, Lagrange Multipliers Theorem, Nehari Manifold, sub and supersolution.

Sumário

Introdução

Neste trabalho iremos mostrar a existência de soluções não triviais para algumas equações elípticas semilineares em um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, onde $N \geq 3$. Esta dissertação está dividida em três capítulos e dois anexos organizados da seguinte forma.

No Capítulo 1, buscamos solução não trivial para uma equação elíptica usando o Teorema do Passo da Montanha. Dividimos este capítulo em duas seções. Na primeira seção estudamos o caso geral

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

no qual $g(x,u)$ é uma função contínua, subcrítica que satisfaz a conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Na seção seguinte, estudamos o caso particular $g(x,u) = |u|^{p-1}u$, para $1 < p < 2^* - 1$, provando que o nível do Passo da Montanha do funcional associado coincide com o ínfimo deste funcional na variedade de Nehari. Neste capítulo usamos como referência os livros de Rabinowitz [11] e de Davi G. Costa [3].

Nos capítulos seguintes estudamos equações envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas. Muitos estudos tem sido realizados sobre problemas deste tipo. Citamos o famoso artigo de Ambrosetti, Brezis e Cerami [1], no qual estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^p \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave e $0 < q < 1 < p$. Usando o método de sub e supersolução os autores mostraram que existe $\Lambda > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \Lambda]$ o problema (0.1) possui uma solução não trivial e não há solução para $\lambda > \Lambda$. No caso em que $1 < p < (N+2)/(N-2)$, usando métodos variacionais provaram a existência de uma segunda solução se $0 < \lambda < \Lambda$.

No Capítulo 2, investigamos uma equação elíptica envolvendo uma função contínua que muda de sinal, do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda f(x) u^q + u^p \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

considerando $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$, tendo como referência o artigo de Tsung-Fang Wu [14]. Mostramos aqui, que se $f(x)$ é qualquer função contínua que muda de sinal em $\bar{\Omega}$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema admite duas soluções positivas se $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Mostraremos isto por meio de minimização do funcional associado na variedade de Nehari, usando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e o Princípio Variacional de Ekeland.

No Capítulo 3, mostramos que existem soluções para a equação do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + h(x)u^p \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde $0 < q < 1 < p < 2^* - 1 + \tau$ e $h(x)$ é uma função Hölder contínua, satisfazendo condições especiais. Neste caso, o problema traz uma função com crescimento supercrítico. Então os argumentos variacionais gerais não podem ser utilizados diretamente. Usamos um Teorema que nos garante a imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ em um domínio cilindricamente simétrico com p maior que o expoente crítico de Sobolev, resultado este provado por Wenzhi Wang [16]. Dessa forma, por meio de argumentos variacionais mostramos que existe $\Lambda \in (0, \infty)$ tal que, para $0 < \lambda < \Lambda$, o problema possui ao menos duas soluções positivas, sendo uma minimizante local do funcional associado e a outra obtida por meio do Teorema do Passo da Montanha; para $\lambda = \Lambda$ o problema tem ao menos uma solução e se $\lambda > \Lambda$ o problema em questão não possui solução. Usamos como base para o estudo neste capítulo, o artigo de J. Gao, Y. Zhang e Peihao Zhao [8].

No Apêndice A mostramos que o funcional associado aos problemas estudados é de classe C^1. Trazemos ainda, alguns resultados importantes de regularidade relacionados aos problemas estudados nos capítulos anteriores. No Apêndice B, apresentamos os principais teoremas utilizados no decorrer da nossa dissertação, juntamente com a referência dos mesmos.

Notação

No decorrer desta dissertação usaremos as seguintes notações:

$\mathbb{R}^+$ conjunto dos números reais não negativos

$B_{r_0}(x)$ bola aberta de centro x e raio r_0 em $\mathbb{R}^N$

$\rightharpoonup, \rightarrow$ convergência fraca e forte, respectivamente

$|\Omega|$ medida de Lebesgue de um conjunto Ω

$q.t.p.$ em quase toda parte

$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ derivada parcial de u em relação a x_i

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ gradiente de u

$\triangle u = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ laplaciano de u

$\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \nu$ derivada normal exterior

$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mensurável}; \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}, \ 1 \leq p < \infty$

$||u||_{L^p} = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ norma no espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mensurável}; |u(x)| \leq C \, \text{q.t.p. sobre} \, \Omega \, \text{para algum} \, C > 0\}$

$C^k(\Omega)$ funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \middle| \begin{array}{c} \exists\ g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) \quad \text{tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, ..., N \end{array} \right\}$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ completamento de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$

$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

$H^{-1}(\Omega)$ é o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$

$p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ para $1 \leq p < N$ expoente crítico de Sobolev

$f = o(g)$ quando $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$

Capítulo 1

Existência de solução para equações elípticas semilineares via Passo da Montanha

1.1 Introdução

Neste capítulo provaremos existência de solução não trivial para equações semilineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, Δu é o Laplaciano de u, $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ é a função variável e $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo algumas hipóteses adicionais que serão descritas a seguir. A existência de soluções para este problema será garantida pelo Teorema do Passo da Montanha.

Mostraremos primeiramente a existência de soluções não triviais para um caso mais geral e em seguida, considerando o caso particular $g(x,t) = |t|^{s-1}t$, mostraremos que o ínfimo do funcional associado ao problema (1.1) sobre a Variedade de Nehari coincide com o nível do Passo da Montanha deste funcional.

1.2 O caso geral

Nesta seção, baseados no livro de Rabinowitz [11], estudaremos o problema (1.1) no caso em que $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo:

(g_1) $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(g_2) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $0 \leq p < 2^* - 1$ tais que

$$|g(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^p, \quad \forall \quad x \in \bar{\Omega} \quad \text{e} \quad \xi \in \mathbb{R};$$

(g_3) $g(x,\xi) = o(|\xi|)$ se $\xi \to 0$, uniformemente em $x \in \bar{\Omega}$;

(g_4) existem constantes $\mu > 2$ e $r \geq 0$ tais que para $|\xi| \geq r$,

$$0 < \mu G(x,\xi) \leq \xi g(x,\xi)$$

onde $G(x,\xi) = \displaystyle\int_0^\xi g(x,t)dt$.

Exemplo 1.1 *Um exemplo de uma função que satisfaz estas condições é $g(x,u) = |u|^{p-1}u$ a qual iremos estudar na próxima seção.*

Observação 1.2 *A hipótese (g_3) implica que $g(x,0) = 0$ e consequentemente, o problema (1.1) admite $u \equiv 0$ como solução. A condição (g_4) é conhecida como Condição de Ambrosetti-Rabinowitz e nos garante que*

$$0 \leq \frac{\mu}{\xi} \leq \frac{g(x,\xi)}{G(x,\xi)}.$$

Integrando a expressão acima obtemos

$$0 \leq \int_{r_0}^\xi \frac{\mu}{t}dt \leq \int_{r_0}^\xi \frac{g(x,t)}{G(x,t)}dt.$$

Temos

$$\int_{r_0}^\xi \frac{\mu}{t}dt = \mu\left(\ln|\xi| - \ln|r_0|\right) = \ln\frac{|\xi|^\mu}{|r_0|^\mu}$$

e

$$\int_{r_0}^\xi \frac{g(x,t)}{G(x,t)}dt = \int_{r_0}^\xi \left(\ln G(x,t)\right)' dt = \ln G(x,\xi) - \ln G(x,r_0) = \ln\frac{G(x,\xi)}{G(x,r_0)}.$$

Assim

$$0 \leq \ln\frac{|\xi|^\mu}{|r_0|^\mu} \leq \ln\frac{G(x,\xi)}{G(x,r_0)}$$

o que implica que

$$\frac{|\xi|^\mu}{|r_0|^\mu} \leq \frac{G(x,\xi)}{G(x,r_0)}.$$

Com isso vemos que $G(x,\xi) \geq c_1|\xi|^\mu$ onde $c_1 = G(x,r_0)/|r_0|^\mu$. Por outro lado, tomando $c_2 = \displaystyle\sup_{(x,\xi)\in\Omega\times(-r,r)} |G(x,\xi)|$ temos que $G(x,\xi) \geq -c_2$. Logo

$$G(x,\xi) \geq c_1|\xi|^\mu - c_2, \quad \forall \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Nosso objetivo, nesta seção, é provar a existência de solução fraca não trivial para (1.1), ou seja, mostraremos que existe $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$ em Ω, tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega g(x,u) v dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

O funcional associado ao problema (1.1) é $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x,u) \right) dx.$$

Pela Proposição A.3 sabemos que se (i) e (ii) são satisfeitas então $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)v = \int_\Omega (\nabla u \nabla v - g(x,u)v) dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, encontrar solução fraca para o problema (1.1) é equivalente a encontrar ponto crítico para o funcional I. Usaremos o Teorema do Passo da Montanha para encontrar tal ponto crítico, devemos então verificar as suas hipóteses.

Uma vez que Ω é limitado podemos tomar como norma em $H_0^1(\Omega)$

$$||u||^2 \equiv \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Na proposição que segue, mostraremos que o funcional I possui a Geometria do Passo da Montanha.

Proposição 1.3 *Se g satisfaz (i) - (iv), então I satisfaz as condições:*

(I) $I(0) = 0$ e existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;

(II) existe $e \in H_0^1(\Omega) \setminus \bar{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.

Demonstração: Vamos verificar a condição (I). Como $G(x,0) = 0$, temos que $I(0) = 0$. Defina

$$J(u) \equiv \int_\Omega G(x,u) dx.$$

Pela hipótese (iii) temos $g(x,\xi) = o(|\xi|)$, se $\xi \to 0$ uniformemente em $x \in \bar{\Omega}$. Assim dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |\xi| < \delta$ implica que $|g(x,\xi)| < \varepsilon |\xi|$. Daí,

$$|G(x,\xi)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon |\xi|^2, \quad \text{se} \quad |\xi| < \delta.$$

Por (ii) existe uma constante $A = A(\delta) > 0$ tal que $|\xi| \geq \delta$ implica que

$$|G(x,\xi)| \leq |\xi g(x,\xi)| \leq |\xi|(a_1 + a_2 |\xi|^p) = a_1 |\xi| + a_2 |\xi|^{p+1} = A |\xi|^{p+1}$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$. Combinando essas duas estimativas, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e $x \in \bar{\Omega}$ temos

$$|G(x,\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2 + A|\xi|^{s+1}.$$

Consequentemente, usando a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{s+1}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} |J(u)| &\leq \frac{\varepsilon}{2}||u||^2_{L^2(\Omega)} + A||u||^{s+1}_{L^{s+1}(\Omega)} \\ &\leq c\left(\frac{\varepsilon}{2}||u||^2 + A||u||^{s+1}\right) \\ &= c||u||^2\left(\frac{\varepsilon}{2} + A||u||^{s-1}\right). \end{aligned}$$

Escolhendo $||u|| \leq (\frac{\varepsilon}{2A})^{\frac{1}{s-1}}$ obtemos

$$|J(u)| \leq \varepsilon c||u||^2.$$

Logo $J(u) = o(||u||^2)$ quando $u \to 0$. Assim, existe $\rho > 0$ tal que

$$\frac{|J(u)|}{||u||^2} < \frac{1}{4} \quad \text{se} \quad ||u|| \leq \rho.$$

Como $I(u) = \dfrac{1}{2}||u||^2 - J(u)$ temos que se $||u|| \leq \rho$ então

$$I(u) > \frac{1}{4}||u||^2.$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{4}\rho^2$ temos que $I(u) \geq \alpha$, se $||u|| = \rho$, ou seja, $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$. Logo a primeira condição é satisfeita.

Verificaremos agora a condição (II). Por (iv) e por (1.2) temos que

$$J(u) \geq c_1 \int_\Omega |u|^\mu dx - c_2|\Omega| \tag{1.3}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω. Escolhendo qualquer $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ por (1.3), uma vez que $\mu > 2$ temos

$$\begin{aligned} I(tu) &= \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla(tu)|^2 - G(x,tu))dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}||u||^2 - c_1\int_\Omega |tu|^\mu dx + c_2|\Omega| \\ &= \frac{t^2}{2}||u||^2 - c_1 t^\mu \int_\Omega |u|^\mu dx + c_2|\Omega| \to -\infty \end{aligned}$$

quando $t \to \infty$. Logo, existe $t > 0$ suficientemente grande tal que $e = tu$ satisfaz $||e|| > \rho$ e $I(e) \leq 0$, ou seja, a segunda condição é satisfeita. ■

Para utilizarmos o Teorema do Passo da Montanha B.4, precisamos verificar que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale (PS). Uma sequência é dita (PS) se $I(u_m)$ é limitado e $I'(u_m) \to 0$ quando $m \to 0$. Dizemos que um funcional satisfaz a condição Palais Smale se toda sequência (PS) possui subsequência convergente. O próximo resultado garante que esta condição é válida para sequências limitadas.

Proposição 1.4 *Seja g satisfazendo (i) e (ii) e I definido como anteriormente. Se $\{u_m\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I'(u_m) \to 0$ se $m \to \infty$, então $\{u_m\}$ é pré-compacta em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $D : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ denotando a aplicação dualidade entre $H_0^1(\Omega)$ e seu dual, a qual sabemos que é uma isometria linear devido ao Teorema de Representação de Riesz. Então para $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$Du(\varphi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \langle u, \varphi \rangle.$$

Como $I'(u)\varphi = \langle u, \varphi \rangle - J'(u)\varphi$, temos $Du = I'(u) + J'(u)$. Ainda, pela Proposição A.3 temos que J' é compacto. Sendo $\{u_m\}$ limitada, então $J'(u_m)$ possui subsquência convergente. Pela continuidade de D^{-1} temos

$$u_{m_k} = D^{-1}I'(u_{m_k}) + D^{-1}J'(u_{m_k}) \to \lim D^{-1}J'(u_{m_k}).$$

Logo $\{u_m\}$ possui subsequência convergente. ■

Proposição 1.5 *I satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração: Devemos mostrar que toda sequência (PS) possui subsequência convergente. Seja $\{u_m\}$ uma sequência (PS). Pela Proposição 1.4, basta mostrar que $\{u_m\}$ é limitada.

Como $I(u_m)$ é limitada, existe $M > 0$ tal que $|I(u_m)| < M$. Além disso, como $I'(u_m) \to 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||I'(u_m)|| < \mu, \ \ \forall \ \ m > m_0.$$

Assim,

$$I(u_m) - \frac{1}{\mu} I'(u_m)u_m \leq M + ||u_m||, \ \ \forall \ \ m > m_0. \tag{1.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{1}{\mu} I'(u_m)u_m &= \frac{1}{2}||u_m||^2 - \int_\Omega G(x, u_m)dx - \frac{1}{\mu}\left(||u_m||^2 - \int_\Omega g(x, u_m)u_m dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)||u_m||^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} g(x, u_m)u_m - G(x, u_m)\right) dx. \end{aligned}$$

Tomando $T_m = \dfrac{1}{\mu} g(\cdot, u_m) u_m - G(\cdot, u_m)$ na equação anterior temos

$$I(u_m) - \frac{1}{\mu} I'(u_m) u_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) ||u_m||^2 + \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| \geq r\}} T_m(x) dx + \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| < r\}} T_m(x) dx.$$

Segue da condição (iv) que

$$\int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| \geq r\}} T_m(x) dx \geq 0.$$

Além disso, como g e G são contínuas e limitadas em $\bar{\Omega} \times [-r, r]$, então T_m é contínua e existe $c > 0$ independente de m tal que

$$|T_m(x)| \leq c \quad \forall \quad x \in \{y \in \bar{\Omega}; |u_m(y)| < r\}.$$

Daí

$$\int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| < r\}} T_m(x) dx \geq -c|\Omega|, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Segue então que

$$I(u_m) - \frac{1}{\mu} I'(u_m) u_m \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) ||u_m||^2 - c|\Omega|. \tag{1.5}$$

Assim, por (1.4) e (1.5) temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) ||u_m||^2 - c|\Omega| \leq I(u_m) - \frac{1}{\mu} I'(u_m) u_m \leq M + \frac{1}{\mu} \varepsilon ||u_m||$$

para todo $m > m_0$. Isto implica que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) ||u_m||^2 - \frac{\varepsilon}{\mu} ||u_m|| \leq M + c|\Omega|, \quad \forall m > m_0.$$

Como $\mu > 2$ concluimos que $\{u_m\}$ é limitada. Assim, pela Proposição 1.4 temos que $\{u_m\}$ possui subsequência convergente. Portanto, I satisfaz a condição (PS). ∎

Pelos resultados anteriores, temos que o funcional I associado ao problema (1.1) tem a geometria do Passo da Montanha e satisfaz a condição (PS). Podemos então usar o Teorema do Passo da Montanha para mostrar que este problema possui solução não trivial.

Teorema 1.6 *Se g satisfaz (i) - (iv), o problema* (1.1) *possui uma solução não trivial.*

Demonstração: Encontrar solução fraca para a equação (1.1) é equivalente a obter um ponto crítico para o funcional I, dado por

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x, u)\right) dx.$$

Pelas Proposições 1.3, 1.4, 1.5, sabemos que são satisfeitas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, que nos garante que I possui um valor crítico $c_{PM} \geq \alpha$ caracterizado por

$$c_{PM} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma([0,1])} I(u)$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)); \quad \gamma(0) = 0 \;\text{ e }\; I(\gamma(1)) < 0\}$. Portanto, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ ponto crítico de I tal que $I(u) = c_{PM}$. Como $c_{PM} > 0$ temos que $u \neq 0$ e por sua vez, u é solução não trivial para a equação (1.1). ■

1.3 O caso particular na Variedade de Nehari

Consideramos a seguir, um caso particular do problema (1.1) da seção anterior, em que $g(x,u) = |u|^{p-1}u$

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.6}$$

onde $1 < p < 2^* - 1$ e Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$. Associado à equação (1.6), considere o funcional $K : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$K(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} dx.$$

Sabemos pela Proposição A.3 que $K \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle K'(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega |u|^{p-1} uv dx.$$

Provamos na seção anterior que a equação (1.6) possui solução não trivial, a qual é obtida como ponto crítico de K, no nível do Passo da Montanha. Neste caso particular, usando Princípio do Máximo, vemos que existe solução positiva para o problema (1.6).

Os resultados a seguir tem como referência o livro de Davi Costa [3]. Definimos a variedade de Nehari associada a K,

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}; \langle K'(u), u \rangle = 0\}.$$

Observe que, se $u \in \mathcal{N}$ então

$$||u||^2 = ||u||_{p+1}^{p+1}. \tag{1.7}$$

Por meio dos resultados que seguem, mostraremos que o conjunto $\mathcal{N}$ é de fato uma variedade fechada e não vazia. Provaremos ainda que o nível do Passo da Montanha do funcional K coincide com o ínfimo de K sobre a variedade $\mathcal{N}$.

Proposição 1.7 *A variedade de Nehari $\mathcal{N}$ é não vazia e $\mathcal{N}$ é uma C^1 - subvariedade de $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: De fato, seja $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(u) = \langle K'(u), u\rangle = ||u||^2 - \int_\Omega |u|^{p+1}dx.$$

Sabemos pela Proposição A.3 que $\phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\phi'(u)v = 2\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - (p+1)\int_\Omega |u|^p v dx.$$

Seja $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$ e considere a função $0 < t \mapsto \phi(tv)$. Então, usando a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$, como $p+1 > 2$ temos

$$\begin{aligned}
\phi(tv) = \langle K'(tv), tv\rangle &= \int_\Omega |\nabla(tv)|^2 dx - \int_\Omega |tv|^{p+1}dx \\
&= t^2||v||^2 - t^{p+1}||v||^{p+1}_{L^{p+1}} \\
&\geq t^2||v||^2 - t^{p+1}c^{p+1}||v||^{p+1} \\
&> 0 \quad \text{se} \quad t > 0 \quad \text{é pequeno.}
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\lim_{t\to\infty} \phi(tv) = \lim_{t\to\infty}\left(t^2||v||^2 - t^{p+1}||v||^{p+1}_{L^{p+1}}\right) = -\infty.$$

Então, existe um $\bar{t} > 0$ tal que $\phi(\bar{t}v) = 0$, ou seja, $\bar{t}v \in \mathcal{N}$. Dessa forma, concluimos que $\mathcal{N} \neq \emptyset$.

Vejamos agora que ϕ não possui ponto crítico em $\mathcal{N}$. Para $u \in \mathcal{N}$, por (1.7) temos

$$\begin{aligned}
\phi'(u)u &= 2||u||^2 - (p+1)\int_\Omega |u|^{p+1}dx \\
&= 2||u||^2 - (p+1)||u||^2 \\
&= (1-p)||u||^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Logo $\phi'(u) \neq 0$, para todo $u \in \mathcal{N}$. Seja $M = H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$. Dessa forma, 0 é o único ponto crítico em $\phi^{-1}(0)$ e $0 \notin M$. Logo $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular de $\phi|_M$. Pelo Teorema da Submersão, segue que $\phi^{-1}|_M(0)$ é uma subvariedade de M. Portanto, $\mathcal{N}$ é uma C^1 - subvariedade de $H_0^1(\Omega)$. ■

Observação 1.8 *Note que $\bar{t}$ é único tal que $\bar{t}v \in \mathcal{N}$, pois se $v \in H_0^1(\Omega)$ e $tv \in \mathcal{N}$ então* *por (1.7) temos que*

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega |\nabla(tv)|^2 dx - \int_\Omega |tv|^{p+1} dx \\
&= t^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - t^{p+1} \int_\Omega |v|^{p+1} dx \\
&= t^2 \int_\Omega |v|^{p+1} dx - t^{p+1} \int_\Omega |v|^{p+1} dx \\
&= t^2(1 - t^{p-1}) \int_\Omega |v|^{p+1} dx.
\end{aligned}
$$

Como $t > 0$ e $v \neq 0$, devemos ter $t = 1$ e por sua vez t é único tal que $tv \in \mathcal{N}$.

Proposição 1.9 *A variedade de Nehari associada a $K(u)$,*

$$
\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}; \langle K'(u), u\rangle = 0\}
$$

é fechada em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u_n \in \mathcal{N}$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então pelas imersões de Sobolev temos que $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega)$, pois $1 < p + 1 < 2^*$. Assim

$$
0 = \langle K'(u_n), u_n\rangle = ||u_n||^2 - \int_\Omega |u_n|^{p+1} dx \to ||u||^2 - ||u||_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} = \langle K'(u), u\rangle,
$$

o que implica $\langle K'(u), u\rangle = 0$. Dessa forma, basta mostrar que $u \neq 0$. Como $u_n \in \mathcal{N}$, pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$ temos

$$
||u_n||^2 = \int_\Omega |u_n|^{p+1} dx \leq c||u_n||^{p+1}.
$$

Assim segue que

$$
||u_n|| \geq \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
$$

Consequentemente, $u \neq 0$ e $u \in \mathcal{N}$, o que mostra que $\mathcal{N}$ é fechada em H_0^1. ∎

Note que, se $u \in \mathcal{N}$ então

$$
K(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)||u||^2 \geq 0.
$$

Logo, $K|_{\mathcal{N}}$ é limitado inferiormente.

Agora estamos prontos para mostrar o principal resultado desta seção, a igualdade entre o ínfimo do funcional K na variedade de Nehari e o nível do Passo da Montanha deste funcional.

Proposição 1.10 *Seja $\beta = \inf\{K(u) : u \in \mathcal{N}\}$. Então $\beta > 0$ e $\beta = c_{PM}$ onde c_{PM} é o nível do Passo da Montanha de K.*

Demonstração: Denotando $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, K(\gamma(1)) < 0\}$, pelo Teorema 1.6 sabemos que o problema (1.6) possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $K(u) = c_{PM}$, onde

$$c_{PM} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{0\leq t\leq 1} K(\gamma(t)) > 0.$$

Mostraremos, primeiramente, que c_{PM} é maior ou igual a β. Como vimos na Proposição 1.3, existe $\delta > 0$ tal que $||v||_{L^{p+1}}^{p+1} \leq \frac{1}{2}||v||^2$ e $K(v) \geq \frac{1}{4}||v||^2$ para todo $v \in \bar{B}(0,\delta)$. Então, dado $\gamma \in \Gamma$ temos $\gamma(0) = 0$ e $K(\gamma(1)) < 0$, donde $\gamma(1) \notin \bar{B}(0,\delta)$. Como γ é contínua, existe $t \in (0,1)$ tal que $\gamma(t) \in \partial B(0,\delta)$, ou seja, $||\gamma(t)|| = \delta$. Seja $t_0 = \max\{t \in (0,1) : ||\gamma(t)|| = \delta\}$. Daí

$$\phi(\gamma(t_0)) = ||\gamma(t_0)||^2 - ||\gamma(t_0)||_{L^{p+1}}^{p+1} \geq \frac{1}{2}||\gamma(t_0)||^2 = \frac{1}{2}\delta^2 > 0.$$

Como

$$0 > K(\gamma(1)) = \frac{1}{2}||\gamma(1)||^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\gamma(1)|^{p+1}$$

temos

$$||\gamma(1)||^2 < \frac{2}{p+1}\int_\Omega |\gamma(1)|^{p+1}.$$

Assim

$$\phi(\gamma(1)) = ||\gamma(1)||^2 - \int_\Omega |\gamma(1)|^{p+1} < \left(\frac{2}{p+1} - 1\right)\int_\Omega |\gamma(1)|^{p+1} < 0.$$

Dessa forma, existe $\bar{t} \in (t_0, 1)$ tal que $\gamma(\bar{t})$ não pertence a $\bar{B}(0,\delta)$ e $\phi(\gamma(\bar{t})) = 0$. Logo $\gamma(\bar{t}) \in N$. Isto implica que

$$\max_{t\in[0,1]} K(\gamma(t)) \geq K(\gamma(\bar{t})) \geq \beta.$$

Portanto, $c_{PM} \geq \beta$. Mostraremos agora que β é maior ou igual a c_{PM}. De fato, dado $u \in \mathcal{N}$ por (1.7) temos que

$$K(tu) = \frac{t^2}{2}||u||^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{p+1}}{p+1}\right)\|u\|^2$$

e $\max_{t>0} K(tu) = K(u)$, pois ocorre em $t = 1$. Além disso, como $p+1 > 2$ segue que

$$\lim_{t\to\infty} K(tu) = -\infty.$$

Fixando $t_0 > 1$ tal que $K(t_0 u) \leq 0$, defina $\gamma(t) = t(t_0 u)$ para $t \in [0,1]$. Assim, temos $\gamma \in \Gamma$ e

$$c_{PM} \leq \sup_{0\leq t\leq 1} K(\gamma(t)) = \sup_{0\leq t\leq 1} K(t(t_0 u)) = K(u).$$

Isto implica que $K(u) \geq c_{PM}$, para todo $u \in \mathcal{N}$, e por sua vez $\beta \geq c_{PM}$. Logo, $\beta = c_{PM} > 0$. ■

Capítulo 2

Uma equação elíptica semilinear envolvendo uma função peso com mudança de sinal

2.1 Introdução

Neste capítulo iremos estudar uma classe de equações elípticas semilineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x)|u|^{q-1}u, & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$, $\lambda > 0$ e $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com mudança de sinal em $\bar{\Omega}$. Este capítulo foi baseado no artigo de Tsung-Fang Wu [14], onde usando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange B.3 mostraremos que para λ pequeno, o problema (2.1) possui ao menos duas soluções positivas.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema 2.1 *Existe $\Lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, a equação (2.1) tem pelo menos duas soluções positivas.*

2.2 O funcional associado e a Variedade de Nehari

O funcional associado a equação (2.1) é $J_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega f(x)|u|^{q+1} dx.$$

Uma solução (fraca) para a equação (2.1) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega |u|^{p-1} uv dx + \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q-1} uv dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

O resultado a seguir mostra a regularidade do funcional J_λ para todo $\lambda > 0$.

Lema 2.2 *O funcional J_λ pertence a $C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$.*

Demonstração: Seja $g_\lambda : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g_\lambda(x,t) = |t|^{p-1}t + \lambda f(x)|t|^{q-1}t$ para cada λ fixado. Como $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ e $p, q > 0$ temos $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Denotando $G_\lambda(x,t) = \displaystyle\int_0^t g_\lambda(x,r)dr$, temos

$$G_\lambda(x,t) = \int_0^t \left(|r|^{p-1}r + \lambda f(x)|r|^{q-1}r\right) dr = \frac{1}{p+1}|t|^{p+1} + \frac{\lambda}{q+1} f(x)|t|^{q+1}.$$

Além disso, como f é limitada em $\bar{\Omega}$ temos

$$|g_\lambda(x,t)| = |t|^p + |\lambda||f(x)||t|^q \leq |t|^p + c_1|t|^q, \quad \forall\ (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Daí

$$|g_\lambda(x,t)| \leq \begin{cases} |t|^p + c_1, & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ (1+c_1)|t|^p, & \text{se} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

o que implica $|g_\lambda(x,t)| \leq c_1 + c_2|t|^p$ para todo $(x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, com $1 < p < 2^* - 1$. Uma vez que

$$J_\lambda(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G_\lambda(x,u)\right) dx,$$

segue da Proposição A.3 que J_λ é de classe C^1 e

$$\begin{aligned} \langle J_\lambda'(u), v\rangle &= \int_\Omega [\nabla u \nabla v - g_\lambda(x,u)v]dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega |u|^{p-1}uv dx - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q-1}uv dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Isto conclui a prova do lema. ■

Observe que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (2.1) se, e somente se, u é ponto crítico de J_λ. Não podemos usar aqui os resultados obtidos no Capítulo 1, porque $g_\lambda(\cdot, t)$ não satisfaz a condição (g_3) e consequentemente vemos que J_λ não possui a geometria do Passo da Montanha. Para resolver o problema (2.1) usaremos outras técnicas que envolvem a variedade de Nehari e o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange B.3.

A variedade de Nehari associada ao funcional J_λ é dada por

$$\mathcal{M}_\lambda = \{H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : \langle J_\lambda'(u), u\rangle = 0\}.$$

Assim, se $u \in \mathcal{M}_\lambda$, segue de (2.2) que

$$||u||^2 - \int_\Omega |u|^{p+1}dx - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx = 0. \tag{2.3}$$

A fim de mostrarmos que o conjunto $\mathcal{M}_\lambda$ é de fato uma variedade fechada e não vazia, começamos definindo $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\psi_\lambda(u) = \langle J'_\lambda(u), u\rangle = ||u||^2 - \int_\Omega |u|^{p+1}dx - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx.$$

De forma análoga ao Lema 2.2, mostramos pela Proposição A.3 que $\psi_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle \psi'_\lambda(u), v\rangle = 2\int_\Omega \nabla u \nabla v - (p+1)\int_\Omega |u|^{p-1}uv - (q+1)\lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q-1}uvdx.$$

Para uma melhor compreensão do comportamento de ψ'_λ na variedade de Nehari, dividimos $\mathcal{M}_\lambda$ em três partes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^0 &= \{u \in \mathcal{M}_\lambda : \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle = 0\} \\
\mathcal{M}_\lambda^+ &= \{u \in \mathcal{M}_\lambda : \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle > 0\} \\
\mathcal{M}_\lambda^- &= \{u \in \mathcal{M}_\lambda : \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle < 0\}.
\end{aligned}$$

Para a demonstração do Teorema 2.1 utilizaremos alguns lemas. Este primeiro garante que o conjunto $\mathcal{M}_\lambda^0$ é vazio para λ pequeno e assim, qualquer $u \in \mathcal{M}_\lambda$ é ponto regular de ψ. Uma vez que $\mathcal{M} = \psi|^{-1}_{H_0^1\setminus\{0\}}(0)$ temos que $\mathcal{M}_\lambda$ é de fato uma variedade.

Lema 2.3 *Existe $\Lambda_1 > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \Lambda_1)$ temos $\mathcal{M}_\lambda^0 = \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos por contradição que $\mathcal{M}_\lambda^0 \neq \emptyset$ para todo $\lambda > 0$ e seja $u \in \mathcal{M}_\lambda^0$. Como $u \in \mathcal{M}_\lambda$, temos

$$\int_\Omega |u|^{p+1}dx = ||u||^2 - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx. \tag{2.4}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\langle \psi'(u), u\rangle &= 2||u||^2 - (p+1)\int_\Omega |u|^{p+1}dx - (q+1)\lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\
&= 2||u||^2 - (p+1)\left(||u||^2 - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx\right) - (q+1)\lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\
&= (1-p)||u||^2 + (p-q)\lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx.
\end{aligned}$$

Já que $\langle \psi'(u), u\rangle = 0$ segue que

$$\left(\frac{p-1}{p-q}\right)||u||^2 = \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx.$$

Considere $\sigma = (p+1)/(p-q)$. Uma vez que $1/\sigma + (q+1)/(p+1) = 1$, pela desigualdade de Hölder, Teorema B.1, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p-1}{p-q}\right)||u||^2 &= \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \leq \lambda \left(\int_\Omega |f(x)|^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\int_\Omega (|u|^{q+1})^{\frac{p+1}{q+1}}dx\right)^{\frac{q+1}{p+1}} \\
&= \lambda ||f||_{L^\sigma} \left[\left(\int_\Omega |u|^{p+1}dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\right]^{q+1} \\
&= \lambda ||f||_{L^\sigma} ||u||^{q+1}_{L^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Desde que $p+1 \in [1, 2^*)$, considere A a melhor constante da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$. Então

$$\left(\frac{p-1}{p-q}\right)||u||^2 \leq \lambda ||f||_{L^\sigma} ||u||_{L^{p+1}}^{q+1} \leq \lambda ||f||_{L^\sigma} A^{q+1} ||u||^{q+1}$$

o que implica que

$$||u|| \quad \leq \quad \left[\lambda\left(\frac{p-q}{p-1}\right)||f||_{L^\sigma} A^{q+1}\right]^{\frac{1}{1-q}}. \tag{2.5}$$

Seja $I_\lambda : \mathcal{M}_\lambda \to \mathbb{R}$ definida por

$$I_\lambda(u) = C(p,q)\left(\frac{||u||^{2p}}{\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx,$$

onde $C(p,q) = \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)$. Note que, $I_\lambda(u) = 0$ para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda^0$. De fato, usando o fato de $u \in \mathcal{M}_\lambda^0$ e (2.4) temos

$$\begin{aligned}
0 &= 2||u||^2 - (p+1)\int_\Omega |u|^{p+1}dx - (q+1)\left(||u||^2 - \int_\Omega |u|^{p+1}dx\right) \\
&= (1-q)||u||^2 - (p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx
\end{aligned}$$

o que implica que

$$||u||^2 = \frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u|^{p+1}dx.$$

Assim

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= C(p,q)\left(\frac{||u||^{2p}}{\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\
&= \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\left(\frac{\left(\frac{p-q}{1-q}\right)^p \left(\int_\Omega |u|^{p+1}dx\right)^p}{\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \frac{p-1}{1-q}\int_\Omega |u|^{p+1}dx \\
&= \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\left(\frac{p-q}{1-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\int_\Omega |u|^{p+1}dx\right)^{\frac{p-1}{p-1}} - \left(\frac{p-1}{1-q}\right)\int_\Omega |u|^{p+1}dx \\
&= \left(\frac{p-1}{1-q}\right)\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \left(\frac{p-1}{1-q}\right)\int_\Omega |u|^{p+1}dx \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, sendo $\sigma = \frac{p+1}{p-q}$, para $u \in \mathcal{M}_\lambda^0$ temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= C(p,q)\left(\frac{||u||^{2p}}{\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\
&\geq C(p,q)\left(\frac{||u||^{2p}}{\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda ||f||_{L^\sigma} ||u||_{L^{p+1}}^{q+1}.
\end{aligned}$$

Como pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$, Proposição A.2, tem-se $||u||_{L^{p+1}} \leq A||u||$, então

$$\begin{aligned} ||u||_{L^{p+1}}^{(q+1)(p-1)} \int_\Omega |u|^{p+1}dx &= ||u||_{L^{p+1}}^{(q+1)(p-1)} ||u||_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\leq \left(A^{(q+1)(p-1)}||u||^{(q+1)(p-1)}\right)\left(A^{p+1}||u||^{p+1}\right) \\ &= A^{q(p-1)+2p}||u||^{q(p-1)+2p}. \end{aligned}$$

Assim, por (2.5)

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq ||u||_{L^{p+1}}^{q+1}\left(C(p,q)\left(\frac{||u||^{2p}}{A^{q(p-1)+2p}||u||^{q(p-1)+2p}}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda||f||_{L^\sigma}\right) \\ &= ||u||_{L^{p+1}}^{q+1}\left(C(p,q)\left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{1}{||u||^q} - \lambda||f||_{L^\sigma}\right) \\ &\geq ||u||_{L^{p+1}}^{q+1}\left\{C(p,q)\left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left[\lambda\left(\frac{p-q}{p-1}\right)||f||_{L^\sigma}A^{q+1}\right]^{\frac{-q}{1-q}} - \lambda||f||_{L^\sigma}\right\} \\ &= ||u||_{L^{p+1}}^{q+1}\left\{C(p,q)\left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\lambda^{\frac{-q}{1-q}}\left[\left(\frac{p-q}{p-1}\right)||f||_{L^\sigma}A^{q+1}\right]^{\frac{-q}{1-q}} - \lambda||f||_{L^\sigma}\right\}. \end{aligned}$$

Isto implica que para λ suficientemente pequeno temos $I_\lambda(u) > 0$ para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda^0$, o que contradiz (2.6). Assim, podemos concluir que existe $\Lambda_1 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \Lambda_1)$ temos $\mathcal{M}_\lambda^0 = \emptyset$. ■

Pelo Lema 2.3 temos $\mathcal{M}_\lambda^0 = \emptyset$ para $\lambda \in (0, \Lambda_1)$, consequentemente podemos escrever $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda^+ \bigcup \mathcal{M}_\lambda^-$.

Vamos agora definir uma função côncava, analisar seu comportamento e identificar seu ponto de máximo, informações que usaremos na demonstração do lema posterior.

Lema 2.4 *Para cada $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ definimos $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por*

$$s(t) = t^{1-q}||u||^2 - t^{p-q}\int_\Omega |u|^{p+1}dx \quad para \quad t \geq 0.$$

Então s tem um único ponto crítico que é $t_{\max} = \left(\frac{(1-q)||u||^2}{(p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ um ponto de máximo global. Além disso,

$$s(t_{\max}) \geq ||u||^{q+1}\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}\left(\frac{p-1}{p-q}\right)\left(\frac{1}{A^{p+1}}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}.$$

Demonstração: Note que $s(0) = 0$. Sendo $p - q > 1 - q$ temos que $s(t) > 0$ para $t > 0$ pequeno e

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} t^{1-q}||u||^2 - t^{p-q}\int_\Omega |u|^{p+1}dx = -\infty.$$

Então, sendo s contínua atinge seu ponto de máximo em algum $t > 0$. Mostraremos agora que $s(t)$ atinge o máximo em $t_{\max}$. Se $t_0 > 0$ é ponto crítico de $s(t)$, então

$$0 = s'(t_0) = (1-q)t_0^{-q}||u||^2 - (p-q)t_0^{p-q-1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx$$

e já que $t_0^{-q} \neq 0$ obtemos

$$(1-q)||u||^2 - (p-q)t_0^{p-1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx = 0.$$

Assim

$$t_0 = \left[\frac{(1-q)||u||^2}{(p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right]^{\frac{1}{p-1}} = t_{\max}$$

e $t_{\max}$ é o único ponto crítico de $s(t)$. Podemos concluir que s é crescente em $(0, t_{\max})$ e s é decrescente em $(t_{\max}, +\infty)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
s(t_{\max}) &= \left[\frac{(1-q)||u||^2}{(p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right]^{\frac{1-q}{p-1}} ||u||^2 - \left[\frac{(1-q)||u||^2}{(p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right]^{\frac{p-q}{p-1}} \int_\Omega |u|^{p+1}dx \\
&= \left(\frac{(1-q)||u||^2}{(p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} ||u||^{(1-q)+(q+1)} \\
&\quad - \left(\frac{(1-q)||u||^{\frac{(p+1)(1-q)+(q+1)(p-1)}{p-q}}}{(p-q)(\int_\Omega |u|^{p+1}dx)^{1-\frac{p-1}{p-q}}}\right)^{\frac{p-q}{p-1}} \\
&= ||u||^{q+1}\left[\left(\frac{(1-q)||u||^{p+1}}{(p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} - \left(\frac{(1-q)||u||^{\frac{(p+1)(1-q)}{p-q}}}{(p-q)(\int_\Omega |u|^{p+1}dx)^{\frac{1-q}{p-q}}}\right)^{\frac{p-q}{p-1}}\right] \\
&= ||u||^{q+1}\left[\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} - \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-1}}\right]\left(\frac{||u||^{p+1}}{\int_\Omega |u|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$, Proposição A.2, temos

$$\begin{aligned}
s(t_{\max}) &\geq ||u||^{q+1}\left[\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} - \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{p-1}}\right]\left(\frac{||u||^{p+1}}{A^{p+1}||u||^{p+1}}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} \\
&= ||u||^{q+1}\left[\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} - \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}\left(\frac{1-q}{p-q}\right)\right]\left(\frac{1}{A^{p+1}}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} \\
&= ||u||^{q+1}\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}\left(\frac{p-1}{p-q}\right)\left(\frac{1}{A^{p+1}}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ∎

Este próximo resultado garante que $\mathcal{M}_\lambda^-$ e $\mathcal{M}_\lambda^+$ são conjuntos não vazios se $\lambda > 0$ é pequeno e também nos fornece uma caracterização para $\mathcal{M}_\lambda^-$.

Lema 2.5 *Seja* $\sigma = \frac{p+1}{p-q}$ *e* $\Lambda_2 = \left(\frac{p-1}{p-q}\right)\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}} A^{\frac{2(q-p)}{p-1}}||f||_{L^\sigma}^{-1}$. *Então para cada* $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ *e* $\lambda \in (0, \Lambda_2)$, *temos*

(i) existe um único $t^- = t^-(u) > t_{\max}$ *tal que* $t^-u \in \mathcal{M}_\lambda^-$ *e* $J_\lambda(t^-u) = \max_{t \geq t_{\max}} J_\lambda(tu)$;

(ii) $t^- : H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *é um funcional contínuo;*

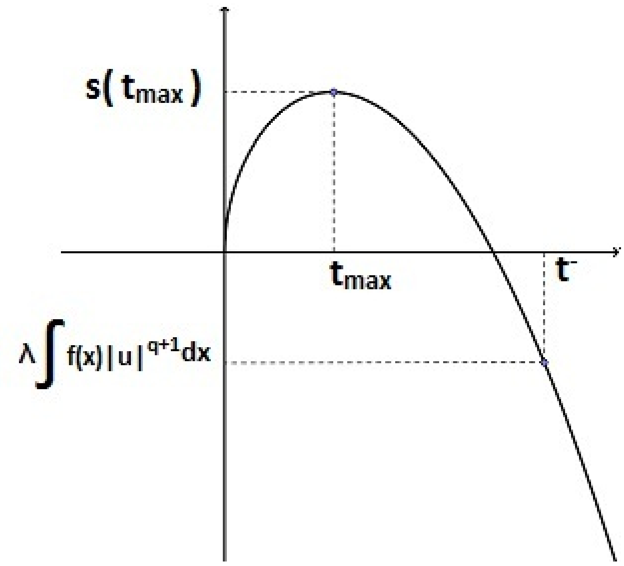
(iii) $\mathcal{M}_\lambda^- = \{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : \ t^-(u/||u||) = ||u||\}$;

(iv) *se* $\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx > 0$ *então existe um único* $0 < t^+ = t^+(u) < t_{\max}$ *tal que* $t^+u \in \mathcal{M}_\lambda^+$ *e* $J_\lambda(t^+u) = \min\limits_{0\le t\le t^-} J_\lambda(tu)$.

Demonstração: (i) A demonstração do primeiro item será dividida em dois casos:

Caso I: $\displaystyle\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \le 0$.

Pela proposição anterior sabemos que s é decrescente para $t > t_{max}$, que $s(t_{max}) > 0$ e que $\lim_{t\to\infty} s(t) = -\infty$. Então existe um único $t^- > t_{\max}$ tal que $s(t^-) = \lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx$ e por sua vez $s'(t^-) < 0$, como mostra a figura a seguir.



Agora, observe que para $t > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(tu), tu\rangle &= ||tu||^2 - \int_\Omega |tu|^{p+1}dx - \lambda\int_\Omega f(x)|tu|^{q+1}dx \\
&= t^2||u||^2 - t^{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx - t^{q+1}\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\
&= t^{q+1}\left[t^{1-q}||u||^2 - t^{p-q}\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx\right]. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Assim, para $t = t^-$ temos

$$\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(t^-u), t^-u\rangle &= (t^-)^{q+1}\left[s(t^-) - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx\right] \\
&= (t^-)^{q+1}\left[s(t^-) - s(t^-)\right] = 0
\end{aligned}$$

o que implica que $t^-u \in \mathcal{M}_\lambda$ e consequentemente

$$\lambda\int_\Omega f(x)|t^-u|^{q+1}dx = ||t^-u||^2 - \int_\Omega |t^-u|^{p+1}dx.$$

Observe também que para $t > 0$

$$
\begin{aligned}
& (1-q)||tu||^2 - (p-q)\int_\Omega |tu|^{p+1}dx \\
= \;& (1-q)t^2||u||^2 - (p-q)t^{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx \\
= \;& t^{2+q}\left[(1-q)t^{-q}||u||^2 - (p-q)t^{p-q-1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx\right]. \\
= \;& t^{2+q}\left[s'(t)\right]. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Assim para $t = t^-$

$$(1-q)||t^-u||^2 - (p-q)\int_\Omega |t^-u|^{p+1}dx = (t^-)^{2+q}s'(t^-) < 0.$$

E ainda, se $tu \in \mathcal{M}_\lambda$

$$
\begin{aligned}
\langle \psi'_\lambda(tu), tu\rangle &= 2||tu||^2 - (p+1)\int_\Omega |tu|^{p+1}dx - (q+1)\lambda\int_\Omega f(x)|tu|^{q+1}dx \\
&= 2||tu||^2 - (p+1)\int_\Omega |tu|^{p+1}dx - (q+1)\left(||tu||^2 - p\int_\Omega |tu|^{p+1}dx\right) \\
&= (1-q)||tu||^2 - (p-q)\int_\Omega |tu|^{p+1}dx. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, para $t = t^-$ segue que

$$\langle \psi'_\lambda(t^-u), t^-u\rangle = (1-q)||t^-u||^2 - (p-q)\int_\Omega |t^-u|^{p+1}dx < 0,$$

ou seja, $t^-u \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Mostraremos agora que t^-u é o ponto de máximo para J_λ, se $t > t_{\max}$. Temos

$$J_\lambda(tu) = \frac{t^2}{2}||u||^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \frac{t^{q+1}}{q+1}\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_\lambda(tu) &= t||u||^2 - t^p\int_\Omega |u|^{p+1}dx - t^q\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\
&= t^q\left[t^{1-q}||u||^2 - t^{p-q}\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx\right] \\
&= t^q\left[s(t) - s(t^-)\right]. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Como $s(t) > 0$ em $(0, t_{\max})$, s é decrescente em $(t_{\max}, \infty)$, e estamos supondo $s(t^-) \leq 0$ segue que

$$\frac{d}{dt}J_\lambda(tu)\begin{cases} > 0, & \text{em} \quad (0, t^-) \\ = 0, & \text{em} \quad t^- \\ < 0, & \text{em} \quad (t^-, \infty) \end{cases} \qquad (2.11)$$

Consequentemente $J_\lambda(\cdot\, u)$ é crescente em $(0,t^-)$, $\dfrac{d}{dt}J(t^-u)=0$ e $J_\lambda(\cdot\, u)$ é decrescente em (t^-,∞), logo t^- é o único ponto crítico de $J_\lambda(\cdot\, u)$, o qual é ponto de máximo. Portanto $J_\lambda(t^-u)=\max_{t>0} J_\lambda(tu)$.

Caso II: $\displaystyle\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx>0.$

Como $s(0)=0$, pela desigualdade de Hölder, Teorema B.1, temos

$$s(0)=0<\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx\le\lambda||f||_{L^\sigma}||u||^{q+1}_{L^{p+1}}\le\lambda||f||_{L^\sigma}A^{q+1}||u||^{q+1}.$$

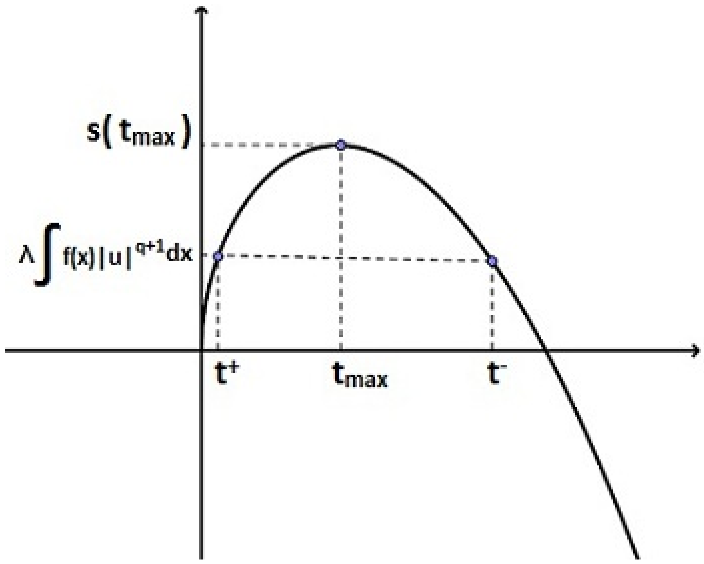
Assim para cada $u\in H_0^1$ e $\lambda\in(0,\Lambda_2)$, pelo Lema 2.4 temos

$$\begin{aligned}0<\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx &< \left[\left(\frac{p-1}{p-q}\right)\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}A^{\frac{2(q-p)}{p-1}}||f||^{-1}_{L^\sigma}\right]||f||_{L^\sigma}A^{q+1}||u||^{q+1}\\ &= \left(\frac{p-1}{p-q}\right)\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}\left(\frac{1}{A^{p+1}}\right)^{\frac{1-q}{p-1}}||u||^{q+1}\le s(t_{\max}).\end{aligned}$$

Logo, existem únicos t^+ e t^- onde $0<t^+<t_{\max}<t^-$, tais que

$$s(t^+)=\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx=s(t^-)$$

e tem-se $s'(t^-)<0$ e $s'(t^+)>0$. Veja a figura abaixo.



Por (2.7), temos

$$\langle J'_\lambda(tu),tu\rangle=(t)^{q+1}\left[s(t)-s(t^-)\right],$$

de modo que para $t=t^+$ ou $t=t^-$ tem-se $\langle J'_\lambda(tu),tu\rangle=0$, ou seja, $t^+u,t^-u\in\mathcal{M}_\lambda$. Por (2.8) e (2.9) obtemos

$$\langle\psi'_\lambda(tu),tu\rangle=(t)^{2+q}(s'(t)).\tag{2.12}$$

Podemos concluir então que $\langle \psi'_\lambda(t^+u), t^+u\rangle > 0$ e $\langle \psi'_\lambda(t^-u), t^-u\rangle < 0$, e por sua vez, $t^+u \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e $t^-u \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Como s é crescente para $t \in (0, t_{\max})$ e decrescente para $t \in (t_{\max}, \infty)$, sabendo que vale (2.10) temos

$$\frac{d}{dt}J_\lambda(tu) = t^q[s(t) - s(t^-)] \begin{cases} < 0, & \text{em} \quad (0, t^+) \cup (t^-, \infty) \\ = 0, & \text{em} \quad t^+ \quad \text{e} \quad t^- \\ > 0, & \text{em} \quad (t^+, t^-). \end{cases} \tag{2.13}$$

Então

$$J_\lambda(t^-u) = \max_{t \geq t^+} J_\lambda(tu) \quad \text{e} \quad J_\lambda(t^+u) = \min_{0 \leq t \leq t^-} J_\lambda(tu).$$

Isto prova (i) e (iv).

(ii) Seja $t^- : H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida em (i). Suponhamos que t^- não é uma função contínua. Então existem (u_n), $u_0 \subset H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tais que u_n converge para u_0 em $H_0^1(\Omega)$ e $|t^-(u_n) - t^-(u_0)| \geq \rho > 0$. Como $u_n \to u_0$ temos que

$$\lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1}dx \to \lambda \int_\Omega f(x)|u_0|^{q+1}dx,$$

donde $\lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1}dx$ é uma sequência limitada. Pela Proposição 2.4 para cada $u_n \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ temos que

$$s_n(t^-(u_n)) = \lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1}dx.$$

Daí existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} c \geq |s_n(t^-(u_n))| &= \left|(t^-(u_n))^{(1-q)}||u_n||^2 - (t^-(u_n))^{p-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx\right| \\ &\geq (t^-(u_n))^{p-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx - (t^-(u_n))^{(1-q)}||u_n||^2 \\ &> (t^-(u_n))^{(p-q)}\frac{||u_0||_{L^{p+1}}^{p+1}}{2} - (t^-(u_n))^{(1-q)}\frac{3||u_0||^2}{2}. \end{aligned}$$

Assim

$$c_1(t^-(u_n))^{(p-q)} - c_2(t^-(u_n))^{(1-q)} \leq c$$

onde $c_1 = \frac{||u_0||_{L^{p+1}}^{p+1}}{2}$ e $c_2 = \frac{3||u_0||^2}{2}$. Logo $t^-(u_n)$ é limitada o que implica que existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $t^-(u_n) \to \bar{t}$, a menos de subsequência. Sendo $t^-(u_n) > t_{\max}(u_n)$ para todo natural n e $t_{\max}(u_n) \to t_{\max}(u_0)$ segue que $\bar{t} \geq t_{\max}(u_0)$. Daí, pela definição de s_n vemos que $s_n(t^-(u_n)) \to s_0(\bar{t})$. Mas temos que

$$s_n(t^-(u_n)) = \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1}dx \to \int_\Omega f(x)|u_0|^{q+1}dx = s_0(t^-(u_0)).$$

Pela unicidade do limite temos que $s_0(t^-(u_0)) = s_0(\bar{t})$. Isto é uma contradição pois s_0 é injetiva em $[t_{\max}(u_0), \infty)$ e $t^-(u_0) \neq \bar{t}$. Portanto t^- é contínuo.

(iii) Seja $u \in \mathcal{M}_\lambda^-$ e $v = u/||u||$. Pelo item (i), existe um único $t^-(v) > 0$ tal que $t^-(v)v \in \mathcal{M}_\lambda^-$, isto é, $t^-(u/||u||)(1/||u||)u \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Como já temos que $u \in \mathcal{M}_\lambda^-$, então

$$t^-\left(\frac{u}{||u||}\right)\frac{1}{||u||} = 1$$

isto implica que

$$\mathcal{M}_\lambda^- \subset \left\{u \in H_0^1\backslash\{0\} | \frac{1}{||u||}t^-\left(\frac{u}{||u||}\right) = 1\right\}.$$

Reciprocamente, seja $u \in H_0^1\backslash\{0\}$ tal que $t^-(u/||u||) = ||u||$. Então

$$u = t^-\left(\frac{u}{||u||}\right)\frac{u}{||u||} \in \mathcal{M}_\lambda^-.$$

Assim

$$\left\{u \in H_0^1\backslash\{0\} | \frac{1}{||u||}t^-\left(\frac{u}{||u||}\right) = 1\right\} \subset \mathcal{M}_\lambda^-.$$

Logo

$$\mathcal{M}_\lambda^- = \left\{u \in H_0^1\backslash\{0\}(\Omega) | \frac{1}{||u||}t^-\left(\frac{u}{||u||}\right) = 1\right\}$$

o que conclui a prova do lema. ■

2.3 Estimativas para o ínfimo de J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$

Para encontrarmos um minimizante para o funcional J_λ precisamos primeiramente verificar que este é limitado inferiormente, o que faremos no próximo lema.

Lema 2.6 *O funcional J_λ é coercivo e limitado inferiormente na variedade $\mathcal{M}_\lambda$ para todo $\lambda \in \left(0, \frac{p-1}{p-q}\right)$.*

Demonstração: Se $u \in \mathcal{M}_\lambda$ então $\langle J_\lambda'(u), u\rangle = 0$, daí

$$\int_\Omega |u|^{p+1}dx = ||u||^2 - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx.$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\
&= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{p+1}\left(||u||^2 - \lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx\right) - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)||u||^2 - \lambda\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\
&= \left(\frac{p-1}{2(p-1)}\right)||u||^2 - \lambda\left(\frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\right)\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx.
\end{aligned}$$

Pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e pela desigualdade de Hölder, sendo $\sigma = \dfrac{p+1}{p-q}$ temos

$$J_\lambda(u) \geq \left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)||u||^2 - \lambda\left(\frac{p-q}{(q+1)(p+1)}||f||_{L^\sigma}A^{q+1}||u||^{q+1}\right).$$

Pela desigualdade de Young, como $\dfrac{q+1}{2} + \dfrac{1-q}{2} = 1$, temos que

$$\begin{aligned} ||f||_{L^\sigma}A^{q+1}||u||^{q+1} &\leq \frac{1-q}{2}\left(||f||_{L^\sigma}A^{q+1}\right)^{\frac{2}{1-q}} + \frac{q+1}{2}\left(||u||^{q+1}\right)^{\frac{2}{q+1}} \\ &= \frac{1-q}{2}\left(||f||_{L^\sigma}A^{q+1}\right)^{\frac{2}{1-q}} + \frac{q+1}{2}||u||^2. \end{aligned}$$

Assim, se $u \in \mathcal{M}_\lambda$ temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \left[\frac{p-1}{2(p+1)} - \lambda\left(\frac{p-q}{2(p+1)}\right)\right]||u||^2 - \lambda\left(\frac{(p-q)(1-q)}{2(q+1)(p+1)}\right)\left(||f||_{L^\sigma}A^{q+1}\right)^{\frac{2}{1-q}} \\ &\geq \frac{1}{2(p+1)}\left[(p-1) - \lambda(p-q)\right]||u||^2 - \lambda\left(\frac{(p-q)(1-q)}{2(q+1)(p+1)}\right)\left(||f||_{L^\sigma}A^{q+1}\right)^{\frac{2}{1-q}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $\lambda \in \left(0, \frac{p-1}{p-q}\right)$, temos que

$$(p-1) - \lambda(p-q) > 0$$

e consequentemente, $J_\lambda(u) \to +\infty$ quando $||u|| \to +\infty$, ou seja, J_λ é coercivo em $\mathcal{M}_\lambda$. Além disso,

$$J_\lambda(u) \geq -\lambda\left(\frac{(p-q)(1-q)}{2(q+1)(p+1)}\right)\left(||f||_{L^\sigma}A^{q+1}\right)^{\frac{2}{1-q}}, \quad \forall u \in \mathcal{M}_\lambda. \tag{2.14}$$

Logo, $J_\lambda(u)$ é limitado inferiormente para todo $\lambda \in \left(0, \frac{p-1}{p-q}\right)$. ∎

Afim de obtermos algumas estimativas para o ínfimo do funcional J_λ em $\mathcal{M}_\lambda^+$ e $\mathcal{M}_\lambda^-$, vamos considerar o conjunto onde a função f é estritamente positiva. Seja Θ uma componente conexa do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) > 0\}$, logo Θ é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, e considere a equação

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p, \ \ em\ \Theta \\ \ \ 0 \leq u \in H_0^1(\Theta). \end{cases} \tag{2.15}$$

O funcional associado a equação (2.15) é $K : H_0^1(\Theta) \to \mathbb{R}$ dado por

$$K(u) = \frac{1}{2}\int_\Theta |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Theta |u|^{p+1}dx$$

e $N(\Theta) = \{u \in H_0^1\backslash\{0\} | \langle K'(u), u\rangle = 0\}$ é a variedade de Nehari associada a K. No Capítulo 1 mostramos que o problema (2.15) possui uma solução positiva w_0 no nível do Passo da Montanha. Além disso, pela Proposição 1.10, definindo

$$\beta(\Theta) = \inf_{u \in N(\Theta)} K(u),$$

temos que $K(w_0) = \beta(\Theta) = c_{PM}$, ou seja, o ínfimo do funcional na variedade de Nehari, que é atingido em w_0, coincide com o nível do Passo da Montanha.

Para encontrarmos um minimizante para o funcional J_λ precisamos verificar algumas propriedades enunciadas no lema a seguir, onde

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda &:= \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{M}_\lambda\}, \\ \alpha_\lambda^+ &:= \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{M}_\lambda^+\} \quad \text{e} \\ \alpha_\lambda^- &:= \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{M}_\lambda^-\}. \end{aligned}$$

Lema 2.7 *Para* $0 < \lambda < \min\left\{\frac{p-1}{p-q}, \Lambda_2\right\}$ *existe* $t_\lambda > 0$ *tal que*

$$\alpha_\lambda \leq \alpha_\lambda^+ < -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta) < 0.$$

Demonstração: Seja w_0 uma solução positiva da equação (2.15) tal que $K(w_0) = \beta(\Theta)$. Então, uma vez que $\Theta \subset \Omega$, definindo $w_0 \equiv 0$ em $\Omega \backslash \Theta$, temos que

$$\int_\Omega f(x) w_0^{q+1} dx = \int_\Theta f(x) w_0^{q+1} dx > 0,$$

pois $f(x) > 0$ em Θ. Segue do Lema 2.5(iv) que existe um único $0 < t_\lambda = t^+(w_0)$ tal que $t_\lambda w_0 \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e tem-se

$$s(t_\lambda) = \lambda \int_\Omega f(x) w_0^{q+1} dx > 0.$$

Pela definição de s temos

$$t_\lambda^{1-q} ||w_0||^2 - t_\lambda^{p-q} \int_\Omega w_0^{p+1} dx = \lambda \int_\Omega f(x) w_0^{q+1} dx.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_\lambda w_0) &= \frac{1}{2} ||t_\lambda w_0||^2 - \frac{1}{p+1} \int_\Omega (t_\lambda w_0)^{p+1} dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega f(x) (t_\lambda w_0)^{q+1} dx \\ &= \frac{t_\lambda^2}{2} ||w_0||^2 - \frac{t_\lambda^{p+1}}{p+1} \int_\Omega w_0^{p+1} dx - \frac{\lambda t_\lambda^{q+1}}{q+1} \int_\Omega f(x) w_0^{q+1} dx \\ &= \frac{t_\lambda^2}{2} ||w_0||^2 - \frac{t_\lambda^{p+1}}{p+1} \int_\Omega w_0^{p+1} dx - \frac{t_\lambda^{q+1}}{q+1} \left(t_\lambda^{1-q} ||w_0||^2 - t_\lambda^{p-q} \int_\Omega w_0^{p+1} dx \right) \\ &= \frac{t_\lambda^2}{2} ||w_0||^2 - \frac{t_\lambda^{p+1}}{p+1} \int_\Omega w_0^{p+1} dx - \frac{t_\lambda^2}{q+1} ||w_0||^2 + \frac{t_\lambda^{p+1}}{q+1} \int_\Omega w_0^{p+1} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) t_\lambda^2 ||w_0||^2 + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) t_\lambda^{p+1} \int_\Omega w_0^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Como w_0 é solução de (2.15)

$$-\triangle w_0 = w_0^p \quad \Rightarrow \quad ||w_0||^2 = \int_\Theta w_0^{p+1} dx.$$

Sendo $0 < t_\lambda < t_{\max}$, temos

$$t_\lambda < t_{\max} = \left(\frac{(1-q)||w_0||^2}{(p-q)\int_\Theta |w_0|^{p+1}dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_\lambda w_0) &= \left(\frac{q-1}{2(q+1)} \right) t_\lambda^2 ||w_0||^2 + \left(\frac{p-q}{(q+1)(p+1)} \right) t_\lambda^{p+1} \int_\Omega |w_0|^{p+1}dx \\ &= -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \left(\frac{1}{2}||w_0||^2 - \left(\frac{p-q}{1-q} \right) \frac{1}{p+1} t_\lambda^{p-1} \int_\Omega |w_0|^{p+1}dx \right) \\ &< -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \left(\frac{1}{2}||w_0||^2 - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |w_0|^{p+1}dx \right) \\ &= -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta) < 0. \end{aligned}$$

E ainda, como $\mathcal{M}_\lambda^+ \subset \mathcal{M}_\lambda$ temos $\alpha_\lambda \le \alpha_\lambda^+$. Sendo $t_\lambda = t^+$ então $t_\lambda w_0 \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e

$$\alpha_\lambda \le \alpha_\lambda^+(\Omega) \le J_\lambda(t_\lambda w_0) < -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta) < 0$$

como desejado. ■

2.4 Existência de sequências minimizantes para J_λ

Apresentaremos agora dois lemas essenciais para mostrar a existência de sequências minimizantes que sejam sequências (PS) para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$ e em $\mathcal{M}_\lambda^-$, a partir do Teorema da Função Implícita para espaços de Banach.

Lema 2.8 *Considere $\lambda \in (0, \Lambda_1)$. Para cada $u \in \mathcal{M}_\lambda$, existem $\varepsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0, \varepsilon) \subset H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi(0) = 1$, a função $\xi(v)(u - v) \in \mathcal{M}_\lambda$ e*

$$\langle \xi'(0), w \rangle = \frac{2\int_\Omega \nabla u \nabla w dx - (p+1)\int_\Omega |u|^{p-1}uwdx - (q+1)\lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q-1}uwdx}{(1-q)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx} \tag{2.16}$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Para $u \in \mathcal{M}_\lambda$, defina uma função $F : \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$F(\tau, w) = \langle J_\lambda'(\tau(u - w)), \tau(u - w) \rangle.$$

Pela definição de J_λ'

$$\begin{aligned} F(\tau, w) &= \int_\Omega |\nabla(\tau(u - w))|^2 dx - \int_\Omega |\tau(u - w)|^{p+1}dx - \lambda \int_\Omega f(x)|\tau(u - w)|^{q+1}dx \\ &= \tau^2 \int_\Omega |\nabla(u - w)|^2 dx - \tau^{p+1} \int_\Omega |u - w|^{p+1}dx - \lambda\tau^{q+1} \int_\Omega f(x)|u - w|^{q+1}dx. \end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{M}_\lambda$, obtemos

$$F(1,0) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega |u|^{p+1}dx - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx = \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0.$$

Derivando F em relação a τ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}F(\tau,w) &= 2\tau \int_\Omega |\nabla(u-w)|^2dx - (p+1)\tau^p \int_\Omega |(u-w)|^{p+1}dx \\ &\quad -\lambda(q+1)\tau^q \int_\Omega f(x)|u-w|^{q+1}dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3 temos que $\langle \psi'_\lambda(u), u\rangle \neq 0$, para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$, daí

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}F(1,0) &= 2\int_\Omega |\nabla u|^2dx - (p+1)\int_\Omega |u|^{p+1}dx - \lambda(q+1)\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\ &= (1-q)\int_\Omega |\nabla u|^2dx - (p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx = \langle \psi'_\lambda(u), u\rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w}F(\tau,w)(\zeta) &= -2\,\tau^2 \int_\Omega \nabla(u-w)\nabla\zeta dx \\ &\quad + (p+1)\tau^{p+1}\int_\Omega |u-w|^{p-1}(u-w)\zeta dx \\ &\quad + (q+1)\tau^{q+1}\lambda \int_\Omega f(x)|u-w|^{q-1}(u-w)\zeta dx. \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{\partial}{\partial w}F(1,0)\zeta = -2\int_\Omega \nabla u\nabla\zeta dx + (p+1)\int_\Omega |u|^{p-1}u\zeta dx + (q+1)\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q-1}u\zeta dx$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita existem $\varepsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0,\varepsilon) \subset H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que $\xi(0) = 1$, $F(\xi(v), v) = 0$, para todo $v \in B(0,\varepsilon)$ e

$$\begin{aligned} \langle \xi'(0), v\rangle &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial w}(1,0)v}{\frac{dF}{d\tau}(1,0)} \\ &= \frac{2\int_\Omega \nabla u\nabla v dx - (p+1)\int_\Omega |u|^{p-1}uvdx - (q+1)\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q-1}uvdx}{(1-q)\int_\Omega |\nabla u|^2dx - (p-q)\int_\Omega |\nabla u|^{p+1}dx}. \end{aligned}$$

Pela definição de F obtemos

$$\langle J'_\lambda(\xi(v)(u-v)), \xi(v)(u-v)\rangle = 0$$

para todo $v \in B(0,\varepsilon)$. Logo $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{M}_\lambda$, o que prova o lema. ■

Lema 2.9 *Considere $\lambda \in (0,\Lambda_1)$. Para cada $u \in \mathcal{M}^-_\lambda$, existem $\varepsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi^- : B(0,\varepsilon) \subset H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi^-(0) = 1$, a função $\xi^-(v)(u-v) \in \mathcal{M}^-_\lambda$ e*

$$\langle (\xi^-)'(0), w\rangle = \frac{2\int_\Omega \nabla u\nabla w dx - (p+1)\int_\Omega |u|^{p-1}uwdx - (q+1)\lambda\int_\Omega f(x)|u|^{q-1}uwdx}{(1-q)\int_\Omega |\nabla u|^2dx - (p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx} \tag{2.17}$$

para todo $w \in H^1_0(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{M}_\lambda^-$, em particular, $u \in \mathcal{M}_\lambda$, então segue do Lema 2.8 que existe $\varepsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi^- : B(0,\varepsilon) \subset H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\xi^-(0) = 1$,

$$\langle (\xi^-)'(0), w\rangle = \frac{2\int_\Omega \nabla u \nabla w dx - (p+1)\int_\Omega |u|^{p-1}uw dx - (q+1)\int_\Omega f(x)|u|^{q-1}uw dx}{(1-q)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (p-q)\int_\Omega |u|^{p+1}dx}$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{M}_\lambda$ para todo $v \in B(0,\varepsilon)$. Basta então mostrar que $\xi(v)(u-v) \in M_\lambda^-(\Omega)$. Como $u \in \mathcal{M}_\lambda^-$ temos que

$$\langle \psi_\lambda'(u), u\rangle < 0.$$

Pela continuidade das funções ψ_λ e ξ^-, tomando ε suficientemente pequeno temos

$$\langle \psi_\lambda'(\xi^-(v)(u-v)), \xi^-(v)(u-v)\rangle < 0 \quad \forall v \in B(0,\varepsilon).$$

Isto implica que $\xi^-(v)(u-v) \in \mathcal{M}_\lambda^-$. ∎

A proposição a seguir mostra a existência de sequências minimizantes em $M_\lambda(\Omega)$ e $M_\lambda^-(\Omega)$ que sejam sequências (PS).

Proposição 2.10 *Seja* $\Lambda_0 = \min\{\Lambda_1, \Lambda_2, \frac{p-1}{p-q}\}$ *então para* $\lambda \in (0, \Lambda_0)$,

(i) existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ *tal que*

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda + o(1) \quad e \quad J_\lambda'(u_n) = o(1) \quad em \quad H^{-1}(\Omega).$$

(ii) existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda^-$ *tal que*

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^- + o(1) \quad e \quad J_\lambda'(u_n) = o(1) \quad em \quad H^{-1}(\Omega).$$

Demonstração: (i) Pelo Lema 2.6, temos que J_λ é coercivo e limitado inferiormente em $\mathcal{M}_\lambda$ para todo $\lambda \in \left(0, \frac{p-1}{p-q}\right)$. Sendo $\alpha_\lambda = \inf\{J_\lambda(u); u \in \mathcal{M}_\lambda\}$, pelo Princípio Variacional de Ekeland, Teorema B.7, existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda + \frac{1}{n} \quad \text{e} \tag{2.18}$$

$$J_\lambda(u_n) < J_\lambda(w) + \frac{1}{n}||w - u_n|| \quad \text{para cada} \quad w \in \mathcal{M}_\lambda. \tag{2.19}$$

Dessa forma, esta sequência u_n satisfaz a primeira condição de (i). Basta mostrar então que $J'(u_n) = o(1)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Pelo Lema 2.7 temos que existe $t_\lambda > 0$ tal que

$$\alpha_\lambda < -\frac{1-q}{q+1}t_\lambda^2\beta(\Theta) < 0.$$

Como $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ temos

$$\int_\Omega |u_n|^{p+1} dx = ||u_n||^2 - \lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1} dx.$$

Tomando n grande, por (2.18) temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{p+1}\left(||u_n||^2 - \lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1} dx\right) - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)||u_n||^2 - \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1} dx \\ &= \alpha_\lambda + \frac{1}{n} < -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta). \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\frac{(p-q)}{(q+1)(p+1)}\lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1} dx > \left(\frac{p-1}{2(p+1)}\right)||u_n||^2 + \frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta) \geq \frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta).$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1} dx &\geq \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta)\right)\frac{(q+1)(p+1)}{(p-q)} \\ &= \frac{1}{\lambda}\frac{(1-q)(p+1)}{(p-q)} t_\lambda^2 \beta(\Theta) > 0. \end{aligned}$$

Pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e pela desigualdade de Hölder temos

$$||f||_{L^\sigma} A^{q+1} ||u_n||^{q+1} \geq \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1} dx > \frac{(1-q)(p+1)}{\lambda(p-q)} t_\lambda^2 \beta(\Theta) > 0,$$

consequentemente, $u_n \neq 0$ e para n grande temos

$$||u_n|| > \left[\frac{(1-q)(p+1)}{\lambda(p-q)} t_\lambda^2 \beta(\Theta) ||f||_{L^\sigma}^{-1} A^{-(q+1)}\right]^{\frac{1}{q+1}}. \tag{2.20}$$

Como por (2.18), $J_\lambda(u_n)$ é limitado e pelo Lema 2.6, é coercivo, então devemos ter (u_n) limitada, ou seja, existe $a > 0$ tal que $||u_n|| \leq a$.

Mostraremos agora que $||J'(u_n)|| \to 0$ quando $n \to +\infty$. Aplicando o Lema 2.8 com $u_n \in \mathcal{M}_\lambda$, temos que existem $\varepsilon_n > 0$ e $\xi_n : B(0, \varepsilon_n) \subset H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável tal que $\xi_n(w)(u_n - w) \in \mathcal{M}_\lambda$. Fixando $n \in \mathbb{N}$, considere $0 < \rho < \varepsilon_n$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u \neq 0$ e seja $w_\rho = (\rho/||u||)u$, de modo que $w_\rho \in B(0, \varepsilon_n)$. Definindo $\eta_\rho = \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)$ temos que $\eta_\rho \in \mathcal{M}_\lambda$, e por (2.19) temos

$$J_\lambda(\eta_\rho) - J_\lambda(u_n) \geq -\frac{1}{n}||\eta_\rho - u_n||.$$

Pela definição de diferenciabilidade temos que

$$J_\lambda(u_n + v) = J_\lambda(u_n) + \langle J'_\lambda(u_n), v\rangle + o(||v||)$$

onde $\lim_{v\to 0}\dfrac{o(||v||)}{||v||}=0$. Escrevendo $\eta_\rho = u_n + (\eta_\rho - u_n)$ temos

$$-\frac{1}{n}||\eta_\rho - u_n|| \leq J_\lambda(\eta_\rho) - J_\lambda(u_n) = \langle J'_\lambda(u_n), \eta_\rho - u_n\rangle + o(||\eta_\rho - u_n||). \tag{2.21}$$

Lembrando que $J'_\lambda(u_n)$ é linear, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle J'_\lambda(u_n), \eta_\rho - u_n\rangle &= \langle J'_\lambda(u_n), (\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)) - u_n\rangle \\
&= \xi_n(w_\rho)\langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho\rangle - \langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle + \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho\rangle - \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho\rangle \\
&= \xi_n(w_\rho)\langle J'_\lambda(u_n), (u_n - w_\rho)\rangle - \langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho\rangle - \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho\rangle \\
&= (\xi_n(w_\rho) - 1)\langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho\rangle - \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho\rangle. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Assim por (2.21) temos

$$(\xi_n(w_\rho) - 1)\langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho\rangle - \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho\rangle \geq -\frac{1}{n}||\eta_\rho - u_n|| + o(||\eta_\rho - u_n||).$$

Como $\eta_\rho = \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) \in \mathcal{M}_\lambda$ temos que $\langle J'_\lambda(\eta_\rho), \eta_\rho\rangle = 0$, o que implica que

$$\xi_n(w_\rho)\langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle = 0.$$

Sendo $\xi_n(w_\rho) > 0$ segue que $\langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle = 0$. Por (2.22) temos

$$\begin{aligned}
&(\xi_n(w_\rho) - 1)\langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho\rangle - (\xi_n(w_\rho) - 1)\langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle - \langle J'_\lambda(u_n), \frac{\rho u}{||u||}\rangle \\
&\geq -\frac{1}{n}||\eta_\rho - u_n|| + o(||\eta_\rho - u_n||)
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$(\xi_n(w_\rho) - 1)\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle + \frac{1}{n}||\eta_\rho - u_n|| + o(||\eta_\rho - u_n||) \geq \rho\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{||u||}\right\rangle.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{||u||}\right\rangle &\leq \frac{||\eta_\rho - u_n||}{n\rho} + \frac{o(||\eta_\rho - u_n||)}{\rho} \\
&\quad + \frac{(\xi_n(w_\rho) - 1)}{\rho}\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho\rangle. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Analisamos cada parcela separadamente. Temos

$$\begin{aligned}
||\eta_\rho - u_n|| &= ||\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - u_n|| \\
&= ||\xi_n(w_\rho)u_n - \xi_n(w_\rho)w_\rho - u_n|| \\
&\leq ||\xi_n(w_\rho)u_n - u_n|| + |\xi_n(w_\rho)|||w_\rho|| \\
&\leq |\xi_n(w_\rho) - 1| \quad ||u_n|| + \rho|\xi_n(w_\rho)| \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-1|}{\rho} &= \lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-\xi_n(0)|}{\rho}\\
&= \lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(\frac{\rho u}{||u||})-\xi_n(0)|}{\rho}\\
&= |\xi_n'(0)\left(\frac{u}{||u||}\right)| \leq ||\xi_n'(0)||.
\end{aligned}$$

Como $\{u_n\}$ é limitada, sendo ξ_n contínuo, por (2.24) temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{\rho\to 0}\frac{||\eta_\rho-u_n||}{n\rho} &\leq \lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-1|||u_n||+\rho|\xi_n(w_\rho)|}{n\rho}\\
&\leq a\lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)-1|}{n\rho}+\lim_{\rho\to 0}\frac{|\xi_n(w_\rho)|}{n}\\
&\leq \frac{1}{n}\left(a||\xi_n'(0)||+\xi_n(0)\right)\\
&\leq \frac{c}{n}\left(||\xi_n'(0)||+1\right)
\end{aligned}$$

onde $c=\max\{a,1\}$. Observe também que

$$\lim_{\rho\to 0}\eta_\rho=\lim_{\rho\to 0}\xi_n(w_\rho)(u_n-w_\rho)=\lim_{\rho\to 0}\xi_n\left(\frac{\rho u}{||u||}\right)\left(u_n-\frac{\rho u}{||u||}\right)=\xi_n(0)(u_n)=u_n.$$

Daí

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{o(||\eta_\rho-u_n||)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{o(||\eta_\rho-u_n||)}{||\eta_\rho-u_n||}\;\frac{||\eta_\rho-u_n||}{\rho}=0.$$

Além disso, como J_λ' é contínuo e $\eta_\rho\to u_n$ quando $\rho\to 0$, temos que $J_\lambda'(\eta_\rho)\to J_\lambda'(u_n)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Logo

$$\lim_{\rho\to 0}|\langle J_\lambda'(u_n)-J_\lambda'(\eta_\rho),u_n-\eta_\rho\rangle|\leq ||J_\lambda'(u_n)-J_\lambda'(\eta_\rho)||\,||u_n-\eta_\rho||=0.$$

Dessa forma, se $\rho\to 0$ em (2.23), para um n fixado, podemos encontrar uma constante $c>0$ independente de u e u_n tal que

$$\left\langle J_\lambda'(u_n),\frac{u}{||u||}\right\rangle\leq\frac{c}{n}(1+||\xi_n'(0)||).$$

Precisamos mostrar agora que $||\xi_n'(0)||$ é uniformemente limitado em n. Por (2.16) temos que

$$|\langle\xi_n'(0),v\rangle|\leq\frac{2|\int_\Omega\nabla u_n\nabla v dx|+(p+1)|\int_\Omega|u_n|^{p-1}u_n v dx|+(q+1)\lambda|\int_\Omega f(x)|u_n|^{q-1}u_n v dx|}{|(1-q)\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx-(p-q)\int_\Omega|u_n|^{p+1}dx|}.$$

Como $||u_n||\leq a$ segue que

$$\left|\int_\Omega\nabla u_n\nabla v dx\right|=|\langle u,v\rangle|\leq||u_n||||v||\leq a||v||.$$

Pela desigualdade de Hölder temos que

$$\left|\int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n v dx\right| \le ||u_n||^p_{L^{p+1}}||v||_{L^{p+1}} \le a^p A^{p+1}||v||$$

e ainda, como f é limitada e $\frac{q}{q+1}+\frac{1}{q+1}=1$ temos

$$\left|\int_\Omega f(x)|u_n|^{q-1}u_n v dx\right| \le c_1||u_n||^q_{L^{q+1}}||v||_{L^{q+1}} \le c_1 A^{q+1}a^q||v||.$$

Assim, tomando $b=\max\{a, a^pA^{p+1}, c_1a^qA^{q+1}\}>0$, temos que

$$\langle \xi_n'(0), v\rangle \le \frac{b||v||}{|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx-(p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx|}.$$

Precisamos apenas mostrar que

$$\left|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx-(p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx\right| > c \tag{2.25}$$

para algum $c>0$ e n grande o suficiente. Argumentamos por contradição. Assumamos que existe uma subsequência de $\{u_n\}$ ainda denotada por $\{u_n\}$ que satisfaz

$$(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx-(p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx = o(1).$$

ou ainda

$$||u_n||^2 = \frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx + o(1) \tag{2.26}$$

Por (2.20) existe $d_1>0$ tal que $||u_n||>d_1$, para n suficientemente grande. Assim, por (2.26)

$$\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx = \frac{1}{p-q}\left((1-q)||u_n||^2+o(1)\right) \ge \frac{1}{p-q}\left((1-q)d_1+o(1)\right) \ge d \tag{2.27}$$

para todo n suficientemente grande, onde $d=\frac{d_1(1-q)}{2(p-q)}>0$. Unindo o fato de que $u_n \in \mathcal{M}_\lambda$ e (2.26) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1}dx &= ||u_n||^2-\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx \\
&= \frac{p-q}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx-\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx+o(1) \\
&= \frac{p-1}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx+o(1) \\
&= \frac{p-1}{1-q}\left(\frac{1-q}{p-q}\right)||u_n||^2+o(1) = \frac{p-1}{p-q}||u_n||^2+o(1)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

o que implica

$$\left(\frac{p-1}{p-q}\right)||u_n||^2 \le \lambda||f||_{L^\sigma}A^{q+1}||u_n||^{q+1}+o(1).$$

Logo,

$$||u_n|| \leq \left[\lambda\left(\frac{p-q}{p-1}\right)||f||_{L^\sigma}A^{q+1}\right]^{\frac{1}{1-q}} + o(1). \tag{2.29}$$

Considerando $I_\lambda : \mathcal{M}_\lambda \to \mathbb{R}$ definido no Lema 2.3, por (2.26) temos

$$I_\lambda(u_n) = C(p,q)\left(\frac{||u_n||^{2p}}{\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1}dx.$$

Segue de (2.26) e (2.28) que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-1}{1-q}\right)\left(\frac{\left(\frac{p-q}{1-q}\right)^p\left(\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx\right)^p}{\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \frac{p-1}{1-q}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx + o(1) \\ &= \left(\frac{p-1}{1-q}\right)\left[\left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{p-q}{1-q}\right)^{\frac{p}{p-1}}\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx - \int_\Omega |u_n|^{p+1}dx\right] + o(1) \\ &= o(1). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Por outro lado, como $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, por (2.27), (2.29) temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= C(p,q)\left(\frac{||u_n||^{2p}}{\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda\int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1}dx \\ &\geq C(p,q)\left(\frac{||u_n||^{2p}}{\int_\Omega |u_n|^{p+1}dx}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda||f||_{L^\sigma}\ \ ||u_n||^{q+1}_{L^{p+1}}. \\ &= ||u_n||^{(q+1)}_{L^{p+1}}\left(C(p,q)\frac{||u_n||^{2p}}{||u_n||^{(q+1)(p-1)+(p+1)}_{L^{p+1}}}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda||f||_{L^\sigma}\ \ ||u_n||^{q+1}_{L^{p+1}}. \end{aligned}$$

Usando a continuidade da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$ temos

$$||u_n||^{(q+1)(p-1)+(p+1)}_{L^{p+1}} \leq A^{(q+1)(p-1)+(p+1)}||u_n||^{(q+1)(p-1)+(p+1)} = A^{q(p-1)+2p}||u_n||^{q(p-1)+2p}.$$

Assim, segue de (2.29) que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &\geq ||u_n||^{q+1}_{L^{p+1}}\left(C(p,q)\left(\frac{||u_n||^{2p}}{A^{q(p-1)+2p}||u_n||^{q(p-1)+2p}}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda||f||_{L^\sigma}\right) \\ &= ||u_n||^{q+1}_{L^{p+1}}\left(C(p,q)\left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{||u_n||^q}\right) - \lambda||f||_{L^\sigma}\right) \\ &\geq ||u_n||^{q+1}_{L^{p+1}}\left\{C(p,q)\left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left[\lambda\left(\frac{p-q}{p-1}\right)||f||_{L^\sigma}A^{q+1}\right]^{\frac{-q}{1-q}} - \lambda||f||_{L^\sigma}\right\}. \end{aligned}$$

Como $\lambda \leq \Lambda_1$ temos que o termo entre chaves é positivo, então por (2.27) temos que $I_\lambda(u_n) \geq c > 0$ para todo n suficientemente grande. Isto contradiz (2.30). Logo

$$\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{||u||}\right\rangle \leq \frac{c}{n}$$

daí, $J'_\lambda(u_n) = o(1)$ em $H^{-1}(\Omega)$.
(ii) Vamos omitir a demonstração, pois provamos (ii) de forma similar a (i) usando o Lema 2.9. ■

2.5 Existência de soluções

Vamos, agora, demonstrar três resultados que provam o Teorema 2.1. O seguinte lema mostra que os minimizantes locais em $\mathcal{M}_\lambda$ são pontos críticos para o funcional J_λ.

Lema 2.11 *Seja $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Se u_0 é um minimizante local para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$, então $J'_\lambda(u_0) = 0$ em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Considere $\mathcal{M}_\lambda$ um conjunto de vínculos para ψ_λ. Pelo Lema 2.3, temos que para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$ tem-se $\psi'_\lambda(u) \neq 0$, ou seja, 0 é um valor regular para ψ_λ. Se $u_0 \in \mathcal{M}_\lambda$ é um minimizante local para J_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda$, então existe uma vizinhança V de u_0 em $\mathcal{M}_\lambda$ tal que u_0 é uma solução do problema de otimização

$$J_\lambda(u_0) = \min_{u \in V} J_\lambda(u).$$

Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, Teorema B.3, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'_\lambda(u_0) = \theta \psi'_\lambda(u_0) \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega).$$

Em particular, $\langle J'_\lambda(u_0), u_0 \rangle = \theta \langle \psi'_\lambda(u_0), u_0 \rangle = 0$ pois $u_0 \in \mathcal{M}_\lambda$. Pelo Lema 2.3, temos que $\langle \psi'_\lambda(u_0), u_0 \rangle \neq 0$. Logo, $\theta = 0$ e $J'_\lambda(u_0) = 0$ em $H^{-1}(\Omega)$. ■

Os teoremas a seguir estabelecem a existência de minimizantes locais para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda^+$ e $\mathcal{M}_\lambda^+$, os quais serão seus pontos críticos e consequentemente soluções para (2.1).

Teorema 2.12 *Seja Λ_0 como na Proposição 2.10, então para $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ o funcional J_λ tem um minimizante u_0^+ em $\mathcal{M}_\lambda^+$ tal que u_0^+ é uma solução positiva da equação (2.1), $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+$ e $J_\lambda(u_0^+) \to 0$ quando $\lambda \to 0$.*

Demonstração: Pela Proposição 2.10(i), vimos que existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$, que é limitada e que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda + o(1) \ \text{ e } \ J'_\lambda(u_n) = o(1) \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega).$$

Então, pela Proposição A.2, a menos de subsequência podemos admitir que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0^+ \ \text{ fracamente em } \ H_0^1(\Omega) \\ u_n &\to u_0^+ \ \text{ fortemente em } \ L^{p+1}(\Omega) \quad \text{e em} \quad L^{q+1}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Afirmação 1: u_0^+ é solução do problema (2.1).

Devemos mostrar que

$$\int_\Omega \nabla u_0^+ \nabla v dx = \int_\Omega |u_0^+|^{p-1} u_0^+ v dx + \lambda \int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q-1} u_0^+ v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad (2.32)$$

ou seja, precisamos mostrar que $\langle J'(u_0^+), v\rangle = 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Temos que $\langle J'(u_n), v\rangle \to 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, assim basta mostrar que $\langle J'(u_n), v\rangle \to \langle J'(u_0^+), v\rangle$. Analisaremos a convergência de cada parcela de $\langle J'(u_n), v\rangle$ separadamente.

Como $u_n \rightharpoonup u_0^+$ em $H_0^1(\Omega)$ temos que $\langle u_n, v\rangle \to \langle u_0^+, v\rangle$. Logo

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx \to \int_\Omega \nabla u_0^+ \nabla v dx.$$

Temos que $u_n \to u_0^+$ em $L^{p+1}(\Omega)$, pelo Teorema B.8 $u_n(x) \to u_0^+(x)$ q.t.p. em Ω e existe $h \in L^{p+1}(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ q.t.p. Daí

$$|u_n(x)|^{p-1} u_n(x) v(x) \to |u_0^+(x)|^{p-1} u_0^+(x) v(x) \quad \text{q.t.p. em}\Omega$$

e

$$||u_n(x)|^{p-1} u_n(x) v(x)| = |u_n(x)|^p |v(x)| \leq h(x)^p |v(x)|.$$

Como $h \in L^p(\Omega)$ temos que $h^p|v| \in L^1(\Omega)$, pois

$$\int_\Omega h^p |v| dx \leq \left(\int_\Omega h^{p+1} dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Segue então do Teorema da Convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n v dx \to \int_\Omega |u_0^+|^{p-1} u_0^+ v dx.$$

Sendo f um função limitada, de maneira semelhante ao que foi feito acima, mostramos que

$$\int_\Omega f(x)|u_n|^{q-1} u_n v dx \to \int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q-1} u_0^+ v dx.$$

Portanto, $\langle J'(u_n), v\rangle \to \langle J'(u_0^+), v\rangle$. Assim, pela unicidade do limite temos $\langle J'(u_0^+), v\rangle = 0$, ou seja, u_0^+ satisfaz (2.32), logo é solução do problema (2.1).

Afirmação 2: $u_n \to u_0^+$.

Como $u_n \in \mathcal{M}_\lambda$, $\langle J_\lambda'(u_n), u_n\rangle = 0$, para todo n. Além disso, devido às convergências de u_n mostradas anteriormente temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |u_n|^{p+1} dx + \lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1} dx\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{p+1} dx + \lim_{n\to\infty} \lambda \int_\Omega f(x)|u_n|^{q+1} dx \\
&= \int_\Omega |u_0^+|^{p+1} + \lambda \int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q+1} dx.
\end{aligned}$$

Mas como u_0^+ é solução da equação (2.1), temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_0^+|^2 = \int_\Omega |u_0^+|^{p+1} + \lambda \int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q+1}dx.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \int_\Omega |\nabla u_0^+|^2.$$

Logo, $u_n \rightharpoonup u_0^+$ e $||u_n|| \to ||u_0^+||$ o que implica que $u_n \to u_0^+$.

Afirmação 3: $\displaystyle\int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q+1}dx > 0$.

Pela continuidade de J_λ temos que $J_\lambda(u_n) \to J_\lambda(u_0^+)$. Mas $J_\lambda(u_n) \to \alpha_\lambda$ quando $n \to \infty$, pois $\{u_n\}$ é uma sequência minimizante para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$. Pela unicidade do limite temos $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda < 0$. Daí,

$$\frac{1}{2}||u_0^+||^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u_0^+|^{p+1}dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q+1}dx < 0.$$

E ainda, como $u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda$ temos que $\langle J_\lambda'(u_0^+), u_0^+\rangle = 0$, donde

$$\int_\Omega |u_0^+|^{p+1}dx = ||u_0^+||^2 - \lambda \int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q+1}dx.$$

Segue das expressões acima que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)||u_0^+||^2 - \lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q+1}dx < 0$$

o que implica que

$$\lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q+1}dx > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)||u_0^+||^2.$$

Uma vez que $q+1 < p+1$, $2 < p+1$ e $\lambda > 0$, existe $c > 0$ tal que

$$\int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q+1}dx \geq c||u_0^+||^2 > 0,$$

o que prova a afirmação.

Afirmação 4: $u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^+$.

De fato, sabendo que $\mathcal{M}_\lambda^+ \cap \mathcal{M}_\lambda^- = \emptyset$ suponha por contradição que $u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Então, pelo Lema 2.5, como $\int_\Omega f(x)|u_0^+|^{q+1}dx > 0$, existem únicos t_0^+ e t_0^- tais que $t_0^+u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^+$, $t_0^-u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^-$, $0 < t_0^+ < t_{\max} < t_0^-$. E ainda por (2.13)

$$J_\lambda(t_0^+u_0^+) = \min_{0<t<t_0^-} J_\lambda(tu_0^+) < J_\lambda(tu_0^+) \quad \forall t \in (t_0^+, t_0^-) \qquad \text{e}$$

$$J_\lambda(t_0^- u_0^+) = \max_{t \geq t_{\max}} J_\lambda(t u_0^+).$$

Como $u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^-$, então $t_0^- = 1$. Dessa forma,

$$J_\lambda(t_0^+ u_0^+) < J_\lambda(t_{\max} u_0^+) \leq J_\lambda(t_0^- u_0^+) = J_\lambda(u_0^+)$$

o que é uma contradição, pois $J_\lambda(t_0^+ u_0^+) \geq \alpha_\lambda^+ \geq \alpha_\lambda = J_\lambda(u_0^+)$. Logo $u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^+$. Daí $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+$.

Afirmação 5: Podemos assumir que u_0^+ é uma solução positiva para (2.1).

Como $J_\lambda(|u_0^+|) = J_\lambda(u_0^+)$, $\langle \psi_\lambda'(|u_0^+|), |u_0^+| \rangle = \langle \psi_\lambda'(u_0^+), u_0^+ \rangle$ e $\langle J_\lambda'(|u_0^+|), |u_0^+| \rangle = \langle J_\lambda'(u_0^+), u_0^+ \rangle$, temos que $|u_0^+| \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e

$$J_\lambda(|u_0^+|) = \inf_{u \in \mathcal{M}_\lambda^+} J_\lambda(u).$$

Então $|u_0^+|$ é um minimizante para J_λ. Pelo Lema 2.11 temos que $J_\lambda'(|u_0^+|) = 0$, ou seja, $|u_0^+|$ é um ponto crítico para J_λ e portanto uma solução fraca para (2.1). Podemos assumir então que u_0^+ é uma solução não negativa para o problema (2.1). Pela Proposição A.4 vemos que $u_0^+ \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ e é positiva em Ω.

Afirmação 6: $J_\lambda(u_0^+) \to 0 \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0$.

Pelo Lema 2.7 temos

$$0 > \alpha_\lambda = J_\lambda(u_0^+) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) ||u_0^+||^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega f(x) |u_0^+|^{q+1} dx.$$

Como $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ e $\Lambda_0 < \frac{p-1}{p-q}$, por (2.14) temos

$$0 > J_\lambda(u_0^+) \geq -\lambda \left(\frac{(p-q)(1-q)}{2(p+1)(q+1)}\right) (||f||_{L^\sigma} A^{q+1})^{\frac{2}{1-q}}$$

o que implica que

$$J_\lambda(u_0^+) \to 0 \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0.$$

■

O Teorema a seguir mostra que existe um mínimo local para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda^-$.

Teorema 2.13 *Seja Λ_0 como na Proposição 2.10, então para $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ o funcional J_λ tem um minimizante u_0^- em $\mathcal{M}_\lambda^-$ tal que u_0^- é uma solução positiva da equação* (2.1) *e $J_\lambda(u_0^-) = \alpha_\lambda^-$.*

Demonstração: Pela Proposição 2.10(ii), existe uma sequência minimizante $\{u_n\}$ para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda^-$ tal que,

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^- + o(1) \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) = o(1) \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Analogamente ao que foi feito no Teorema 2.12, mostramos que existe $u_0^- \in \mathcal{M}_\lambda$ uma solução não nula para a equação (2.1) com $u_n \to u_0^-$. Pela continuidade de ψ'_λ temos que

$$\langle \psi'_\lambda(u_n), u_n \rangle \to \langle \psi'_\lambda(u_0^-), u_0^- \rangle.$$

Como $u_n \in M_\lambda^-(\Omega)$ devemos ter $\langle \psi'_\lambda(u_0^-), u_0^- \rangle \leq 0$. Pelo Lema 2.3, sabemos que $M_\lambda^0(\Omega)$ é vazio, logo $\langle \psi'_\lambda(u_0^-), u_0^- \rangle < 0$, ou seja, $u_0^- \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Pela continuidade de J_λ, temos que

$$J_\lambda(u_n) \to J_\lambda(u_0^-) \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Mas $J_\lambda(u_n) \to \alpha_\lambda^-$, pois $\{u_n\}$ é uma sequência minimizante para J_λ em $M_\lambda^-(\Omega)$. Pela unicidade do limite temos $J_\lambda(u_0^-) = \alpha_\lambda^-$.

Assim como fizemos no Teorema 2.12, podemos assumir que u_0^- é uma solução positiva para (2.1) e $u_0^- \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$. ■

Pelos Teoremas 2.12 e 2.13 obtemos que a equação (2.1) possui duas soluções positivas u_0^+ e u_0^- tais que $u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e $u_0^- \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Sabemos ainda, por definição, que $\mathcal{M}_\lambda^+ \cap \mathcal{M}_\lambda^- = \emptyset$. Portanto, u_0^+ e u_0^- são soluções distintas, o que prova o Teorema 2.1.

2.6 Resultado de não existência

Mostraremos agora que para λ grande o nosso problema não possui solução clássica.

Proposição 2.14 *Seja $\Lambda = \sup\{\lambda > 0 :$ o problema (2.1) tem uma solução clássica$\}$ então $\Lambda \in (0, \infty)$.*

Demonstração: Sabendo que f muda de sinal em Ω e é uma função contínua, concluimos que existe $a > 0$ tal que $\{x \in \Omega : f(x) > a\}$ é um conjunto não vazio. Seja Ω_1 uma bola contida neste conjunto e consideremos $\phi_1 > 0$ a autofunção associada ao primeiro autovalor μ_1 do problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v, & x \in \Omega_1 \\ v = 0, & x \in \partial\Omega_1. \end{cases} \tag{2.33}$$

Escolheremos $\bar{\lambda} > 0$ tal que

$$\mu_1 t < t^p + a\bar{\lambda} t^q, \quad \forall \quad t > 0. \tag{2.34}$$

Observe que

$$\mu_1 t - t^p \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to \infty,$$

assim existe $t_0 > 0$ tal que $\mu_1 t - t^p \leq 0$ para $t \geq t_0$. Para $\bar{\lambda} > t_0^{1-q}\mu_1/a$ vemos que se $t \in (0, t_0)$ então

$$\frac{\mu_1 t - t^p}{at^q} < \frac{\mu_1 t}{at^q} < \frac{\mu_1 t_0^{1-q}}{a} < \bar{\lambda}.$$

Isto mostra a existência de $\bar{\lambda}$ satisfazendo (2.34). Agora, se $u \in C^2(\Omega)$, $u > 0$, é solução do problema (2.1) então

$$\int_{\Omega_1} (u^p + a\lambda u^q)\phi_1 dx < \int_{\Omega_1} (u^p + \lambda f(x)u^q)\phi_1 dx = \int_{\Omega_1} (-\Delta u)\phi_1 dx.$$

Pelo Teorema de Green B.15 temos

$$\int_{\Omega_1} (-\Delta u)\phi_1 dx = \int_{\Omega_1} (-\Delta \phi_1) u dx + \int_{\partial\Omega_1} u \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} dS - \int_{\partial\Omega_1} \phi_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Uma vez que ϕ_1 é a uma autofunção positiva associada a μ_1 para (2.33), temos ϕ_1 uma solução clássica, $\phi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega_1$ e segue do Lema de Hopf B.16 que $\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega_1$. Consequentemente

$$\int_{\Omega_1} (-\Delta u)\phi_1 dx < \int_{\Omega_1} (-\Delta \phi_1) u dx = \int_{\Omega_1} \mu_1 \phi_1 u dx.$$

Pela escolha de $\bar{\lambda}$ obtemos

$$\int_{\Omega_1} (u^p + a\lambda u^q)\phi_1 dx < \int_{\Omega_1} \mu_1 \phi_1 u dx < \int_{\Omega_1} (u^p + a\bar{\lambda} u^q)\phi_1 dx.$$

Logo existe $x_0 \in \Omega_1$ tal que

$$\left(u^p(x_0) + a\lambda u^q(x_0)\right)\phi_1(x_0) < \left(u^p(x_0) + a\bar{\lambda} u^q(x_0)\right)\phi_1(x_0)$$

o que implica que $\lambda < \bar{\lambda}$. E por sua vez, $\Lambda \leq \bar{\lambda} < \infty$. Além disso, mostramos que existem duas soluções para o problema (2.1) para $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, logo $\Lambda \geq \Lambda_0 > 0$. Portanto,

$$0 < \Lambda_0 \leq \Lambda \leq \bar{\lambda} < \infty.$$

Dessa forma, mostramos que para $\lambda > \Lambda$, o problema (2.1) não possui solução positiva $u \in C^2(\Omega)$, pela definição de Λ. ■

Capítulo 3

Existência de soluções para equações elípticas semilineares com caso supercrítico

3.1 Introdução

Neste capítulo mostraremos a existência de duas soluções positivas para uma equação elíptica semilinear em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com simetria cilíndrica envolvendo não linearidade côncavo-convexa do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u^+)^q + h(x)(u^+)^p, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $0 < q < 1 < p < 2^* - 1 + \tau$, sendo λ e τ números reais positivos. Consideramos $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$, com $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, um domínio regular limitado e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^k$ com $k \geq 2$, uma bola de raio R e centrada na origem. Seja h satisfazendo as seguintes condições:

(h_1) h é uma função não negativa, Hölder contínua em $\bar{\Omega}$, radialmente simétrica com relação a $x_2 \in \Omega_2$, satisfazendo

$$h(x_1, 0) = 0 \quad \text{para todo} \quad x_1 \in \Omega_1;$$

(h_2) $l_h > 0$, onde $l_h = \sup\{\lambda > 0 : |h(x)|/|x_2|^\lambda < \infty, x \in \Omega\}$.

Um exemplo de uma função que satisfaz as condições $(h_1) - (h_2)$ é $h(x) = |x_2|^\alpha$ com $\alpha > 0$.

Para nossos estudos neste capítulo, tomamos como referência principal o artigo de Juanjuan Gao, Yong Zhang e Peihao Zhao [8].

No decorrer deste capítulo usaremos as seguintes notações:
$H_s^1(\Omega) := \{u \in H_0^1(\Omega) : u(\cdot, x_2) = u(\cdot, |x_2|)\}$ com a norma

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$L_h^p(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega)| \int_\Omega h|u|^p dx < \infty\}$, o qual é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{h,p} = \left(\int_\Omega h|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty.$$

$L^q(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_q = \left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, 1 < q < \infty.$$

$H_s^{-1}(\Omega)$ é o espaço dual de $H_s^1(\Omega)$.
$u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$.
c, C, C_1, C_2, $\ldots$ são (possivelmente diferentes) constantes positivas.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema 3.1 *Sejam $0 < q < 1 < p < 2^* - 1 + \tau$. Se h satisfaz $(h_1) - (h_2)$, então existe $\Lambda \in (0, \infty)$ tal que*

(1) para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, o problema (P_λ) tem pelo menos duas soluções;

(2) para $\lambda = \Lambda$, o problema (P_λ) tem pelo menos uma solução;

(3) para todo $\lambda > \Lambda$, o problema (P_λ) não tem solução.

Para a demonstração deste teorema usaremos resultados de minimização, o Teorema do Passo da Montanha e o método de sub e supersolução.

3.2 Formulação Variacional

O lema a seguir, cuja demonstração encontramos no artigo [16], mostra um resultado de imersão para valores acima do nível crítico e será crucial para o desenvolvimento deste capítulo.

Lema 3.2 *Assuma que h satisfaz $(h_1)-(h_2)$. Então existe um número $\tau = \tau(h, m, k) > 0$ tal que a imersão $H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L_h^r(\Omega)$ é compacta para todo $r \in (1, 2^* + \tau)$.*

De acordo com o Lema 3.2, para $1 < q+1 < 2 < p+1 < 2^* + \tau$, a aplicação imersão $i : H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L_h^{p+1}(\Omega)$ é compacta e pela Proposição A.2, $H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ é também compacta. Em particular, existe uma constante C tal que

$$||u||_{h,p+1} \leq C||u|| \quad \text{e} \quad ||u||_{q+1} \leq C||u||. \tag{3.1}$$

Uma solução fraca para o problema (P_λ) é uma função $u \in H_s^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \lambda \int_\Omega (u^+)^q v dx + \int_\Omega h(x)(u^+)^p v dx$$

para toda $v \in H_s^1(\Omega)$. Observe que se u é uma solução fraca para (P_λ), usando u^- como função teste, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx = \int_\Omega \nabla u \nabla u^- dx = \lambda \int_\Omega (u^+)^q u^- dx + \int_\Omega h(x)(u^+)^p u^- dx = 0$$

logo $u^- = 0$ e segue que $u \geq 0$ em Ω. Além disso, se tivermos soluções clássicas não triviais, isto é, soluções de classe $C^2(\Omega)$, uma vez que $\lambda(u^+)^q + h(x)(u^+)^p \geq 0$ em Ω, segue do Princípio do Máximo B.17 que $u > 0$, pois u é não trivial. Sendo assim, todas as soluções clássicas encontradas para (P_λ) serão positivas.

Considere

$$f_\lambda(x,s) = \begin{cases} \lambda s^q + h(x)s^p, & \text{se} \quad s \geq 0, \\ 0, & \text{se} \quad s < 0, \end{cases}$$

e $F_\lambda(x,u) = \displaystyle\int_0^u f_\lambda(x,s)ds$. O funcional associado ao problema (P_λ) é $T_\lambda : H_s^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} T_\lambda(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega F_\lambda(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (u^+)^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{p+1}dx. \end{aligned}$$

Devido ao Lema 3.2, usando argumentos análogos aos da Proposição $A.3$ vemos que T_λ está bem definido, é de classe $C^1(H_s^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle T'_\lambda(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega (u^+)^q v dx - \int_\Omega h(x)(u^+)^p v dx$$

para toda $v \in H_s^1(\Omega)$. Encontrar solução fraca para o problema (P_λ) é equivalente a encontrar ponto crítico não trivial para o funcional T_λ.

Começamos nosso trabalho mostrando que o problema (P_λ) possui solução fraca para λ pequeno.

3.3 Existência da primeira solução para $\lambda \in (0, \lambda_0)$

Primeiramente, mostraremos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que podemos encontrar uma solução u_λ do problema (P_λ) para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, onde u_λ é um minimizante local para $T_\lambda(u)$.

Lema 3.3 *Existem $\lambda_0 > 0$ e $r_0, \epsilon > 0$, tais que $T_\lambda(u) \geq \epsilon$ para todo $u \in H_s^1(\Omega)$ com $||u|| = r_0$ e todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.*

Demonstração: Para $u \in H_s^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} T_\lambda(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (u^+)^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{p+1}dx \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{q+1}||u^+||_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1}||u^+||_{h,p+1}^{p+1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sendo $u = u^+ + u^-$ temos que

$$||u||^2 = ||u^+||^2 + ||u^-||^2.$$

Assim, por (3.1) e (3.2), deduzimos que

$$\begin{aligned} T_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda C}{q+1}||u^+||^{q+1} - \frac{C}{p+1}||u^+||^{p+1} \\ &= \frac{1}{2}||u^-||^2 + \frac{1}{2}||u^+||^2 - \lambda\left(C||u^+||\right)^{q+1} - \left(C||u^+||\right)^{p+1} \\ &= \frac{1}{2}||u^-||^2 + \frac{1}{2}||u^+||\left[||u^+|| - \lambda(c||u^+||)^q - (c||u^+||)^p\right]. \end{aligned}$$

Afirmamos que existem reais $\beta_0, \lambda_0 > 0$ e um intervalo $[a, b]$ contido em $\mathbb{R}$ tais que $t - \lambda_0(ct)^q - (ct)^p \geq \beta_0/2$, para todo t neste intervalo. De fato, como $p > 1$ existe $b > 0$ tal que $t > (ct)^p$ para $t \in (0, b]$. Seja $\beta(t) = t - (ct)^p$. Como $\beta(t)$ é contínua, para $a \in (0, b)$ temos

$$\beta_0 = \min_{t \in [a,b]} \beta(t) > 0.$$

Agora, escolha $\lambda_0 > 0$ pequeno tal que

$$\lambda_0(ct)^q \leq \min\left\{\frac{\beta_0}{2}, \frac{b^2 - a^2}{2a}\right\}, \quad \forall\, t \in [a, b]. \tag{3.3}$$

Daí, considere

$$\alpha(t) = t - \lambda_0(ct)^q - (ct)^p,$$

então temos que

$$\alpha(t) \geq \beta_0 - \lambda_0(ct)^q \geq \frac{\beta_0}{2}, \quad \forall\, t \in [a, b]$$

o que prova a afirmação. Observe que se $\lambda \in (0, \lambda_0)$, então

$$t - \lambda(ct)^q - (ct)^p > t - \lambda_0(ct)^q - (ct)^p = \alpha(t) \geq \frac{\beta_0}{2}, \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Tomando $r_0 = b$, se $||u|| = r_0$, podemos ter $||u^+|| \geq a$ ou $||u^+|| < a$. Se $||u^+|| \geq a$, então

$$T_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}||u^-||^2 + \frac{1}{2}||u^+||\frac{\beta_0}{2} \geq \frac{a\beta_0}{4}.$$

Se $||u^+|| < a$, usando (3.3) obtemos

$$\lambda(c||u^+||)^q \frac{||u^+||}{2} < \lambda_0(ca)^q \frac{a}{2} \leq \frac{b^2 - a^2}{4}.$$

Por outro lado,

$$b^2 = ||u||^2 = ||u^+||^2 + ||u^-||^2 < a^2 + ||u^-||^2$$

o que implica que

$$||u^-||^2 > b^2 - a^2.$$

Dessa forma, como $\beta(||u^+||) > 0$ temos

$$\begin{aligned} T_\lambda(u) &> \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{||u^+||}{2}\left(||u^+|| - \lambda(c||u^+||)^q - (c||u^+||)^p\right) \\ &> \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{b^2 - a^2}{4} = \frac{b^2 - a^2}{4}. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \min\{(b^2 - a^2), a\beta_0\}/4$ temos

$$T_\lambda(u) \geq \epsilon \quad \text{para cada} \quad ||u|| = r_0$$

o que conclui a demonstração. ■

O lema a seguir garante a existência da primeira solução não trivial para o problema (P_λ) para λ pequeno.

Lema 3.4 *Para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, T_λ possui um mínimo local perto da origem.*

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} T_\lambda(tu) &= \frac{1}{2}||tu||^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |tu^+|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega h(x)|tu^+|^{p+1}dx \\ &= \frac{1}{2}t^2||u||^2 - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega (u^+)^{q+1}dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega h(x)(u^+)^{p+1}dx. \end{aligned}$$

Claramente, $T_\lambda(tu) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e qualquer $u \in H^1_s(\Omega)$ com $||u^+|| \neq 0$. Seja $\overline{B}_{r_0}(0) = \{u \in H^1_s(\Omega) : ||u|| \leq r_0\}$, então temos

$$I := \inf_{u \in \overline{B}_{r_0}(0)} T_\lambda(u) < 0.$$

Mostraremos que este mínimo é atingido em algum u_λ. Seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{B}_{r_0}(0)$ uma sequência minimizante, então

$$T_\lambda(u_n) \to I.$$

Como $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada, existe $u_\lambda \in H_s^1(\Omega)$ tal que a menos de subsequência valem as seguintes convergências

$$\begin{array}{rclcl} u_n & \rightharpoonup & u_\lambda & \text{em} & H_s^1(\Omega) \\ u_n & \to & u_\lambda & \text{em} & L^{q+1}(\Omega) \\ u_n & \to & u_\lambda & \text{em} & L_h^{p+1}(\Omega) \end{array}$$

onde a última convergência deve-se ao Lema 3.2. Dessa forma

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega F_\lambda(x, u_n) dx &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega (u_n^+)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega h(x)(u_n^+)^{p+1} dx \right) \\ &= \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega (u_\lambda^+)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega h(x)(u_\lambda^+)^{p+1} dx \\ &= \int_\Omega F_\lambda(x, u_\lambda) dx. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} T_\lambda(u_\lambda) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx - \int_\Omega F_\lambda(x, u_\lambda) dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega F_\lambda(x, u_n) dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F_\lambda(x, u_n) dx \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} T_\lambda(u_n) = I. \end{aligned}$$

Como $I := \inf_{u \in B_{r_0}(0)} T_\lambda(u)$ e $u_\lambda \in B_{r_0}(0)$ temos que $T_\lambda(u_\lambda) \geq I$. Segue então que

$$T_\lambda(u_\lambda) = I = \inf_{u \in B_{r_0}(0)} T_\lambda(u).$$

Isto é, u_λ é um minimizante para T_λ em $\overline{B}_{r_0}(0)$ como desejado. ∎

Sendo T_λ de classe C^1, $T_\lambda(0) = 0$ e $T_\lambda(u_\lambda) = I < 0$, então u_λ é um ponto crítico não trivial para T_λ. Portanto, u_λ é a primeira solução do problema (P_λ) para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e daí $u_\lambda \geq 0$ pois já vimos que todas as soluções fracas para este problema são não negativas.

3.4 Existência da segunda solução para $\lambda \in (0, \lambda_0)$

Na sequência, vamos mostrar a existência da segunda solução v_λ usando o Teorema do Passo da Montanha. Verificaremos que T_λ satisfaz as hipóteses deste teorema por meio dos seguintes lemas.

Lema 3.5 *T_λ satisfaz a condição (PS).*

Demonstração: Mostraremos que toda sequência (PS) possui uma subsequência convergente. Seja $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_s^1(\Omega)$ uma sequência (PS), isto é,

$$|T_\lambda(v_n)| \le C \quad \text{e} \quad T'_\lambda(v_n) \to 0 \quad \text{em} \quad H_s^{-1}(\Omega). \tag{3.4}$$

Por (3.4), podemos assumir que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfaz

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx = c + o(1). \tag{3.5}$$

Pela definição de T'_λ temos

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = \langle T'_\lambda(v_n), v_n\rangle + \lambda \int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx + \int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx.$$

Substituindo em (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} c + o(1) \;&=\; \frac{1}{2}\langle T'_\lambda(v_n), v_n\rangle + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1}\int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{\lambda(q-1)}{2(q+1)}\int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx + \frac{p-1}{2(p+1)}\int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx = c - \frac{1}{2}\langle T'_\lambda(v_n), v_n\rangle + o(1).$$

Seja $c_1 = (p-1)/2(p+1)$ e $c_2 = \lambda(1-q)/2(q+1)$. Como $0 < q < 1 < p$, vemos claramente que c_1, $c_2 > 0$. Assim

$$c_1 \int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx \le c_2 \int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx + c + ||T'_\lambda(v_n)||_{H_s^{-1}} ||v_n||,$$

isto é,

$$||v_n^+||_{h,p+1}^{p+1} \le c||v_n^+||_{q+1}^{q+1} + c + C||T'_\lambda(v_n)||_{H_s^{-1}}||v_n||. \tag{3.6}$$

Combinando (3.5) e (3.6), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}||v_n||^2 \;&=\; \frac{\lambda}{q+1}||v_n^+||_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{p+1}||v_n^+||_{h,p+1}^{p+1} + c + o(1) \\ &\le\; \frac{\lambda}{q+1}||v_n^+||_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{p+1}\left(c||v_n^+||_{q+1}^{q+1} + c + C||T'_\lambda(v_n)||_{H_s^{-1}}||v_n||\right) + c \\ &=\; C||v_n^+||_{q+1}^{q+1} + c + C||T'_\lambda(v_n)||_{H_s^{-1}}||v_n||. \end{aligned}$$

Segue por (3.1) que

$$||v_n||^2 \le C||v_n^+||^{q+1} + C + C||v_n||.$$

Deduzimos então que existe uma constante C tal que $||v_n|| \leq C$. Consequentemente, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ é limitada em $H_s^1(\Omega)$ e então existe uma subsequência $\{v_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ fracamente convergente em $H_s^1(\Omega)$. Além disso, temos uma outra desigualdade, por (3.1),

$$||v_n^+||_{h,p+1}^{p+1} \leq C.$$

A partir disso, podemos deduzir o seguinte

$$\begin{array}{lclll} v_{n_j} & \to & v & \text{fortemente em} \quad L_h^{p+1}(\Omega) & \text{para} \quad 1 < p+1 < 2^* + \tau \\ v_{n_j} & \to & v & \text{fortemente em} \quad L^{q+1}(\Omega) & \text{para} \quad 1 < q+1 < 2^* \\ v_{n_j} & \to & v & \text{q.t.p. em } \Omega. & \end{array}$$

Considere $P_j, P_0 : H_s^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

$$P_j(\varphi) = \lambda \int_\Omega (v_{n_j}^+)^q \varphi dx + \int_\Omega h(x)(v_{n_j}^+)^p \varphi dx.$$

e

$$P_0(\varphi) = \lambda \int_\Omega (v^+)^q \varphi dx + \int_\Omega h(x)(v^+)^p \varphi dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |(P_j - P_0)(\varphi)| &= \left| \lambda \int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q \right) \varphi dx + \int_\Omega h(x) \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p \right) \varphi dx \right| \\ &\leq \lambda \left(\int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q \right)^{\frac{q+1}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_\Omega |\varphi|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} \\ &\quad + \left(\int_\Omega h(x) \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p \right)^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_\Omega h(x) |\varphi|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq c||\varphi|| \left(\int_\Omega \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q \right)^{\frac{q+1}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \\ &\quad + c||\varphi|| \left(\int_\Omega h(x) \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p \right)^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned}$$

Como $v_{n_j} \to v$ q.t.p. em Ω vemos que $v_{n_j}^+ \to v^+$ q.t.p. em Ω e como $v_{n_j} \to v$ em $L^{q+1}(\Omega)$, então existe $l \in L^{q+1}(\Omega)$ tal que

$$(v_{n_j}^+(x)) \leq |v_{n_j}(x)| \leq l(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Assim

$$\begin{aligned} \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q \right)^{\frac{q+1}{q}} &\leq \left((v_{n_j}^+)^q + (v^+)^q \right)^{\frac{q+1}{q}} \leq c \left((v_{n_j}^+)^{q+1} + (v^+)^{q+1} \right) \\ &\leq c \left(|l(x)|^{q+1} + (v^+)^{q+1} \right) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega \Big((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q\Big)^{\frac{q+1}{q}} dx \to 0.$$

Por outro lado, como $v_n \to v$ em $L_h^{p+1}(\Omega)$, então para $h = h^{\frac{p}{p+1}} h^{\frac{1}{p+1}}$, temos

$$v_{n_j} h^{\frac{1}{p+1}} \to v h^{\frac{1}{p+1}} \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\Omega).$$

Assim, existe $l_1 \in L^{p+1}(\Omega)$ tal que

$$|h^{\frac{1}{p+1}}(x) v_{n_j}(x)| \leq l_1(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Daí

$$\begin{aligned} h(x)\Big((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p\Big)^{\frac{p+1}{p}} &\leq h(x) C \Big((v_{n_j}^+)^{p+1} + (v^+)^{p+1}\Big) \\ &\leq C\left(l_1^{p+1}(x) + h(x)|v|^{p+1}\right) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_\Omega h(x)\Big((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p\Big)^{\frac{p+1}{p}} dx \to 0.$$

Portanto, $P_j \to P_0$ em $H_s^{-1}(\Omega)$, ou ainda,

$$\lambda (v_{n_j}^+)^q + h(x)(v_{n_j}^+)^p \to \lambda (v^+)^q + h(x)(v^+)^p \quad \text{em} \quad H_s^{-1}(\Omega).$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz, para cada $f_\lambda(w) = \lambda(w^+)^q + h(x)(w^+)^p$ em $H_s^{-1}(\Omega)$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(w), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

tem uma única solução $u \in H_s^1(\Omega)$. Considere $\Phi : H_s^{-1}(\Omega) \to H_s^1(\Omega)$, e seja $u = \Phi(f_\lambda(w))$. Notamos que Φ é uma isometria, pois é um isomorfismo que preserva o produto interno. Como u é a única solução do problema (3.7), então satisfaz

$$\int_\Omega f_\lambda(w)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \langle u, \varphi\rangle = \langle \Phi(f_\lambda(w)), \varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in H_s^1(\Omega)$. Assim

$$\begin{aligned} \langle T'_\lambda(w), \varphi\rangle &= \langle w, \varphi\rangle - \int_\Omega f_\lambda(w)\varphi \\ &= \langle w, \varphi\rangle - \langle \Phi(f_\lambda(w)), \varphi\rangle = \langle w - \Phi(f_\lambda(w)), \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Logo

$$T'_\lambda(w) = w - \Phi(f_\lambda(w)).$$

Sendo Φ contínua, temos que

$$\Phi(f_\lambda(v_{n_j})) \to \Phi(f_\lambda(v)) \quad \text{em} \quad H_s^1(\Omega).$$

Por (3.4) temos que

$$T'_\lambda(v_{n_j}) = v_{n_j} - \Phi(f_\lambda(v_{n_j})) \to 0 \quad \text{em} \quad H_s^{-1}(\Omega),$$

consequentemente,

$$v_{n_j} \to \Phi(f_\lambda(v)) \quad \text{em} \quad H_s^1(\Omega).$$

Pela unicidade do limite fraco temos que $v = \Phi(f_\lambda(v))$. Portanto, T_λ satisfaz a condição (PS). ■

O seguinte lema conclui a demonstração que T_λ tem a geometria do Passo da Montanha e prova que o problema (P_λ) possui uma segunda solução.

Lema 3.6 *Para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, T_λ tem uma segunda solução v_λ do tipo passo da montanha.*

Demonstração: Seja $v \in H_s^1(\Omega)$. Pelos Lemas 3.3 e 3.5, para usarmos o Teorema do Passo da Montanha B.4 precisamos verificar agora que existe $v \notin B_{r_0}$ tal que $T_\lambda(v) \leq 0$. Claramente, $T_\lambda(0) = 0 < \epsilon$. Agora, fixe $v \in H_s^1(\Omega)$, $v^+ \neq 0$ e escreva $\omega := tv$ para $t > 0$. Por (3.2) temos

$$\begin{aligned} T_\lambda(\omega) &= \frac{1}{2}||\omega||^2 - \frac{\lambda}{q+1}||\omega^+||_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1}||\omega^+||_{h,p+1}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2}t^2||v||^2 - \frac{\lambda}{q+1}t^{q+1}||v^+||_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1}t^{p+1}||v^+||_{h,p+1}^{p+1}. \end{aligned}$$

Como $q + 1 < 2 < p + 1$, segue que

$$T_\lambda(\omega) = T_\lambda(tv) \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Logo existe $t_0 > 0$ tal que

$$||\omega|| = ||t_0 v|| > r_0 \quad \text{e} \quad T_\lambda(\omega) = T_\lambda(t_0 v) \leq 0.$$

Pelo Teorema do Passo da Montanha B.4, existe uma função $v_\lambda \in H_s^1(\Omega)$, $v_\lambda \neq 0$, tal que $T_\lambda(v_\lambda) = c \geq \epsilon > 0$ e $T'_\lambda(v_\lambda) = 0$. Isto é, v_λ é um ponto crítico não trivial para T_λ. Uma vez que $T_\lambda(u_\lambda) < 0$ e $T_\lambda(v_\lambda) > 0$ temos que $u_\lambda \neq v_\lambda$ e v_λ é a segunda solução para o problema (P_λ). ■

3.5 Regularidade

Vamos agora estabelecer a regularidade $C^{2,\alpha}$ das soluções fracas para (P_λ) pertencentes a $H^1_s(\Omega)$.

Lema 3.7 *Seja $v \in H^1_s(\Omega)$ uma solução do problema (P_λ), então $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ para algum $\alpha \in (0,1)$.*

Demonstração: Seja $v \in H^1_s(\Omega)$ a solução de (P_λ) fixado, denotamos

$$f_\lambda(x) = f_\lambda(x, v(x)) = \lambda(v^+(x))^q + h(x)(v^+(x))^p.$$

Pelo Lema 3.2 temos a continuidade da imersão $H^1_s(\Omega) \hookrightarrow L^r_h(\Omega)$ e por definição $L^r_h(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ para $r = 2^* + \tau$. Como $v \in H^1_s(\Omega)$, então $v \in L^r_h(\Omega)$ e por sua vez, $v \in L^r(\Omega)$. Daí

$$\int_\Omega (v^+)^{q\frac{r}{p}} dx = \int_{\{(v^+)\leq 1\}} (v^+)^{q\frac{r}{p}} dx + \int_{\{(v^+)>1\}} (v^+)^{q\frac{r}{p}} dx \leq |\Omega| + \int_\Omega (v^+)^r dx < \infty.$$

Além disso, como h é limitado em $\bar{\Omega}$

$$\int_\Omega (h(x)v^+)^{p\frac{r}{p}} dx \leq c \int_\Omega (v^+)^r dx < \infty.$$

Logo

$$\left(\int_\Omega |f_\lambda(x)|^{\frac{r}{p}} dx \right)^{\frac{p}{r}} < \infty,$$

ou seja, $f_\lambda(x) \in L^\vartheta$, para $\vartheta = \dfrac{r}{p}$. Como $1 < p < 2^* - 1 + \tau$, obtemos

$$\vartheta = \frac{r}{p} > \frac{2^* + \tau}{2^* - 1 + \tau}.$$

Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\vartheta = \frac{2^* + \tau}{2^* - 1 + \tau}(1 + \varepsilon).$$

Podemos escrever o problema como uma equação elíptica linear não homogênea

$$\begin{cases} -\Delta v = f_\lambda(x), & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

De acordo com o Teorema de Regularidade para equações elípticas lineares não homogêneas Teorema B.11, como $f_\lambda(x) \in L^\vartheta(\Omega)$, temos que $v \in W^{2,\vartheta}(\Omega)$. Se $2\vartheta > N$, pelas imersões de Sobolev temos que $W^{2,\vartheta}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\vartheta}(\bar{\Omega})$. Sendo $v \in C^{0,\vartheta}(\bar{\Omega})$ e h Hölder contínua, temos que $f_\lambda(x, v) \in C^{0,\vartheta}(\bar{\Omega})$. Assim, pelo Teorema de Schauder B.12 temos que $v \in C^{2,\vartheta}(\bar{\Omega})$.

Se $2\vartheta = N$, então temos que $W^{2,\vartheta}_0(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$, para todo $\gamma > \vartheta$. Logo, tomando $\dfrac{\gamma}{p} > \dfrac{N}{2}$ temos que $v \in L^\gamma(\Omega)$. Claramente, vemos que $f_\lambda \in L^\xi(\Omega)$, para $\xi = \dfrac{\gamma}{p}$ então pelo

Teorema B.11 temos $v \in W^{2,\xi}(\Omega)$. Pelas imersões de Sobolev, $v \in C^{0,\xi}(\bar{\Omega})$, da mesma forma, como $h \in C^{\xi}(\Omega)$, então $f_\lambda \in C^{0,\nu}(\bar{\Omega})$. Daí, pelo Teorema de Schauder B.12, $v \in C^{2,\xi}(\bar{\Omega})$.

No caso em que $2\vartheta < N$, pelo Teorema de imersão de Sobolev, temos

$$W^{2,\vartheta}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega),$$

com $r_1 = \dfrac{N\vartheta}{N-2\vartheta}$. Como $v \in W^{2,\vartheta}(\Omega)$, então $v \in L^{r_1}(\Omega)$ e tem-se

$$\int_\Omega (v^+)^{q\frac{r_1}{p}} dx = \int_{\{(v^+)\leq 1\}} (v^+)^{q\frac{r_1}{p}} dx + \int_{\{(v^+)>1\}} (v^+)^{q\frac{r_1}{p}} dx \leq |\Omega| + \int_\Omega (v^+)^{r_1} dx < \infty$$

e

$$\int_\Omega |h(x)v^+|^{p\frac{r_1}{p}} dx \leq c\int_\Omega (v^+)^{r_1} dx < \infty$$

e resulta que

$$\left(\int_\Omega |f_\lambda(x)|^{\frac{r_1}{p}}\right)^{\frac{p}{r_1}} < \infty.$$

Logo $f_\lambda(x) \in L^{\vartheta_1}(\Omega)$, com $\vartheta_1 = \frac{r_1}{p}$. Então, $v \in W^{2,\vartheta_1}(\Omega)$.

Para mostrar que a regularidade de v foi melhorada, é necessário mostrar que

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{r_1}{r} > 1.$$

Temos que

$$r_1 = \frac{N\left(\frac{2^*+\tau}{2^*-1+\tau}(1+\varepsilon)\right)}{N - 2\left(\frac{2^*+\tau}{2^*-1+\tau}\right)(1+\varepsilon)} = \frac{N(2^*+\tau)(1+\varepsilon)}{N(2^*-1+\tau) - 2(2^*+\tau)(1+\varepsilon)}.$$

Daí

$$\frac{r_1}{r} = \frac{N(2^*+\tau)(1+\varepsilon)}{N(2^*-1+\tau) - 2(2^*+\tau)(1+\varepsilon)}\frac{1}{(2^*+\tau)} = \frac{N(1+\varepsilon)}{N(2^*-1+\tau) - 2(2^*+\tau)(1+\varepsilon)}.$$

Assim, basta verificarmos que

$$N(2^*-1+\tau) - 2(1+\varepsilon)(2^*+\tau) > 0 \quad \text{e} \tag{3.9}$$

$$N(1+\varepsilon) > N(2^*-1+\tau) - 2(2^*+\tau)(1+\varepsilon). \tag{3.10}$$

A partir de (3.9)

$$N(2^*-1+\tau) > 2(1+\varepsilon)(2^*+\tau)$$

o que implica que

$$\frac{N(2^*-1+\tau)}{2(2^*+\tau)} - 1 > \varepsilon$$

e por (3.10) temos

$$\begin{aligned} N(2^* - 1 + \tau) &< N(1+\varepsilon) + 2(1+\varepsilon)(2^* + \tau) \\ &= [N + 2(2^* + \tau)](1+\varepsilon) \end{aligned}$$

daí

$$\frac{N(2^* - 1 + \tau)}{N + 2(2^* + \tau)} - 1 < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Assim

$$\frac{N(2^* - 1 + \tau)}{N + 2(2^* + \tau)} - 1 < \varepsilon < \frac{N(2^* - 1 + \tau)}{2(2^* + \tau)} - 1. \tag{3.12}$$

Podemos então encontrar um $\varepsilon > 0$ satisfazendo (3.12). Consequentemente, temos

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} > 1.$$

Pelo Teorema de regularidade B.11, assim como para $\vartheta_1 > \vartheta$ temos $v \in W^{2,\vartheta_1}(\Omega)$, também para qualquer ϑ_k suficientemente grande, $v \in W^{2,\vartheta_k}(\Omega)$. Quando $2\vartheta_k > N$, pelo Teorema de imersão de Sobolev, podemos obter que $v \in C^{0,\theta}(\bar{\Omega})$, $f_\lambda(x) \in C^{0,\theta}(\bar{\Omega})$, então $v \in C^{2,\theta}(\bar{\Omega})$ pelo Teorema de regularidade de Schauder B.12. ■

3.6 Existência da primeira solução para $\lambda \in (0, \Lambda)$

Mostramos que existe solução positiva para o problema (P_λ) para $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Mostraremos agora a existência de soluções para $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Lema 3.8 *Seja* $\Lambda = \sup\{\lambda > 0 :$ *o problema* (P_λ) *tem uma solução*$\}$ *então* $\Lambda \in (0, \infty)$.

Demonstração: Como h é uma função não negativa e não trivial existe $x \in \Omega$ tal que $h(x) > 0$. Sendo ainda h uma função contínua, existe $a > 0$ tal que o conjunto $\{x \in \Omega; h(x) > a\}$ é não vazio. Considere Ω_0 como sendo uma bola contida neste conjunto e $\phi_1 \in H_0^1(\Omega_0)$ uma autofunção positiva associada ao primeiro autovalor λ_1 do problema

$$\begin{cases} -\Delta \phi_1 = \lambda_1 \phi_1, & x \in \Omega_0 \\ \phi_1 = 0, & x \in \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Sabemos que $\lambda_1 > 0$ e $\phi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega_0$. Pelo Lema de Hopf (veja Teorema B.16) segue que $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega_0$. Agora, escolha $\bar{\lambda} > 0$ satisfazendo

$$\lambda_1 t < \bar{\lambda} t^q + a t^p, \quad \forall\, t > 0 \tag{3.14}$$

Note que

$$\lambda_1 t - at^p \to -\infty \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Então existe $t_0 > 1$ tal que

$$\lambda_1 t - at^p \leq 0, \quad \forall \quad t \geq t_0.$$

Para $t \in (1, t_0]$ temos que existe $c > 0$ tal que

$$\lambda_1 t - at^p < ct^q.$$

Para $t \in (0, 1)$ temos

$$\lambda_1 t - at^p < \lambda_1 t < \lambda_1 t^q.$$

Daí, para $\bar{\lambda} = \max\{c, \lambda_1\}$ temos

$$\lambda_1 t - at^p < \bar{\lambda} t^q, \quad \text{quando} \quad t > 0.$$

Considere $u \in C^2(\Omega)$ uma solução do problema (P_λ) para $\lambda \in (0, \Lambda)$. Assim com fizemos na Proposição 2.14 do capítulo anterior, usando Teorema de Green B.15 e o Teorema de Hopf B.16, obtemos

$$\int_{\Omega_0} (\lambda u^q + au^p)\phi_1(x)dx < \int_{\Omega_0} (\bar{\lambda} u^q + au^p)\phi_1 dx.$$

Logo existe $x_0 \in \Omega_0$ tal que

$$(\lambda u^q(x_0) + au^p(x_0))\, \phi_1(x_0) < \left(\bar{\lambda} u^q(x_0) + au^p(x_0)\right) \phi_1(x_0)$$

o que implica que $\lambda < \bar{\lambda}$. Em particular, $\Lambda \leq \bar{\lambda} < \infty$. Por outro lado, mostramos que para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o problema (P_λ) possui uma solução, então $\Lambda \geq \lambda_0 > 0$. Portanto,

$$0 < \lambda_0 \leq \Lambda \leq \bar{\lambda} < \infty,$$

como queríamos demonstrar. ∎

O problema sublinear apresentado a seguir terá uma importante relação com o problema (P_λ).

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q, & x \in \Omega \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

A proposição a seguir nos fornece informações sobre o problema sublinear (3.15) que serão necessárias para a demosntração dos resultados posteriores. Lembrando que uma função

$\underline{u}$ $(\overline{u}) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ é uma subsolução (supersolução) do problema (3.15) se satisfaz respectivamente

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f(x, \underline{u}), & \text{em } \Omega \\ \underline{u} \leq 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \geq f(x, \overline{u}), & \text{em } \Omega \\ \overline{u} \geq 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

Proposição 3.9 *Seja $\lambda \in (0, \Lambda)$. Temos que $\varepsilon\phi_1$ é uma subsolução do problema* (3.15) *para ε suficientemente pequeno.*

Demonstração: Seja ϕ_1 a autofunção do operador $-\Delta$ associada ao autovalor λ_1 em relação a Ω. Queremos mostrar que

$$-\Delta(\varepsilon\phi_1) \leq \lambda(\varepsilon\phi_1)^q.$$

Temos que

$$-\Delta(\varepsilon\phi_1) = \varepsilon(\lambda_1\phi_1) = \left(\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\phi_1^{1-q}\right)(\lambda(\varepsilon\phi_1)^q).$$

Então, basta encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\phi_1^{1-q} \leq 1.$$

Como $\phi_1 \in L^\infty(\Omega)$, existe $c > 0$ tal que

$$\phi_1^{1-q}(x) \leq c, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Daí

$$\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\phi_1^{1-q} \leq \varepsilon^{1-q}\left(\frac{\lambda_1 C}{\lambda}\right) \leq 1.$$

Logo, podemos tomar

$$0 < \varepsilon \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_1 C}\right)^{\frac{1}{1-q}},$$

o que implica que

$$-\Delta(\varepsilon\phi_1) \leq \lambda(\varepsilon\phi_1)^q,$$

ou seja, $\varepsilon\phi_1$ é uma subsolução do problema (3.15). Além disso, dado qualquer supersolução positiva $\bar{u}$ de (3.15), usando argumentos semelhantes aos usados por Annaxsuel Lima em [6], podemos mostrar que $\varepsilon\phi_1 \leq \bar{u}$ para ε suficientemente pequeno. De fato, considere $\bar{u}$ uma supersolução positiva do problema (3.15). Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e definamos o conjunto $\Omega_1 = \{x \in \Omega; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq \delta\}$. Como $\phi_1, \bar{u} > 0$ em Ω e pela compacidade de $\overline{\Omega\backslash\Omega_1}$, existe $c > 0$ tal que

$$\frac{\bar{u}(x)}{\phi(x)} \geq c, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega\backslash\Omega_1}. \tag{3.18}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Hopf temos que $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$ e como $\partial\Omega$ é compacto, temos que existe $C < 0$ tal que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(x) < C, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1.$$

Usando os mesmos argumentos, como $\phi_1 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ temos que existe $c_1 > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x)\right| \leq c_1, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1.$$

Considere a função $h : \overline{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \gamma\phi_1(x) - \bar{u}(x)$ com $\gamma > 0$. Seja $c_0 = \inf_{\overline{\Omega}_1}(\partial\phi_1)/(\partial\nu)$. Assim, se $\gamma > c/c_0$ temos

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(x) = \gamma\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(x) \geq \gamma c_0 - C > 0, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1. \tag{3.19}$$

Fixando $x \in \overline{\Omega}_1$, definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(t) = h(x + t\nu)$. Para cada $x \in \overline{\Omega}_1$, excolha um único $\tilde{x} \in \overline{\Omega}_1$ tal que a reta que passa por esses dois pontos cincida com a reta suporte do vetor normal exterior $\nu = \nu(\tilde{x})$. Assim, existe $\tilde{t} > 0$ tal que $x + \tilde{t}\nu = \tilde{x} \in \partial\Omega$. Temos que $h(\partial\Omega) \equiv 0$, daí

$$g(\tilde{t}) = h(x + \tilde{t}\nu) = h(\tilde{x}) = 0. \tag{3.20}$$

Observe que g é a composta de duas funções de classe C^1, logo $g : [0, \tilde{t}] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0, \tilde{t}]$ e derivável em $(0, \tilde{t})$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0, \tilde{t})$, tal que

$$g(\tilde{t}) - g(0) = g'(\xi)(\tilde{t} - 0).$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \nu}(x + \xi\nu) &= \lim_{z\to 0} \frac{h(x + \xi\nu + z\nu) - h(x + \xi\nu)}{z} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{h(x + (\xi + z)\nu) - h(x + \xi\nu)}{z} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{g(\xi + z) - g(\xi)}{z} \\
&= g'(\xi).
\end{aligned}$$

Daí, por (3.20) temos

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(x + \xi\nu)(\tilde{t}) = g'(\xi)(\tilde{t}) = g(\tilde{t}) - g(0) = -h(x).$$

Por (3.19) e sendo $\tilde{t} > 0$ segue que

$$-h(x) = \frac{\partial h}{\partial \nu}(x + \xi\nu)(\tilde{t}) > 0 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}_1.$$

Consequentemente, $h(x) \leq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}_1$ e assim $h(x) = \gamma\phi_1(x) - \bar{u}(x) \leq 0$. Segue então que

$$\gamma\phi \leq \bar{u}(x), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_1$$

o que implica que

$$\frac{\bar{u}(x)}{\phi_1(x)} \geq \gamma > 0 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}_1. \tag{3.21}$$

Por (3.18) e (3.21) obtemos

$$\frac{\bar{u}(x)}{\phi_1} \geq c_2 > 0, \quad \forall\, x \in \Omega$$

onde $c_2 = \min\{c, \gamma\}$. Portanto, tomando $0 < \varepsilon < c_2$ temos que $\varepsilon\phi_1 \leq \bar{u}$. ■

Dessa forma pelo Teorema B.13 o problema (3.15) possui uma solução u tal que

$$\varepsilon\phi_1 \leq u \leq \bar{u}.$$

O resultado a seguir é importante para encontrar a primeira solução para $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Lema 3.10 *Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, (P_λ) tem um mínimo na topologia C^1.*

Demonstração: Fixe $\lambda \in [\lambda_0, \Lambda)$. Escolha $\lambda < \lambda_2 < \Lambda$ tal que (P_{λ_2}) tem uma solução u_2. De acordo com o Teorema 2.5 (veja [4]), como a função

$$t \mapsto \frac{g(x,t)}{t} = \lambda_0 t^{q-1}$$

é não decrescente para $t > 0$, o problema (3.15) possui uma única solução positiva u_0 quando $\lambda = \lambda_0$. Como u_2 é solução de (P_{λ_2}) temos

$$-\Delta u_2 = \lambda_2 u_2^q + h(x) u_2^p > \lambda u_2^q,$$

dessa forma, u_2 é uma supersolução do problema (3.15). Assim, pela Proposição 3.9 e pelo Teorema B.13, para ε suficientemente pequeno existe uma solução do problema (3.15) tal que

$$\varepsilon\phi_1 \leq u \leq u_2.$$

Como a solução é única $u_0 = u$ e $u_0 \leq u_2$. Como u_0 é solução e u_2 não é solução de (3.15), temos que $u_0 \neq u_2$. Uma vez que

$$-\Delta(u_2 - u_0) \geq \lambda(u_2^q - u_0^q) \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad u_2 - u_0 = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega,$$

segue do Princípio do Máximo B.17 que $u_0 < u_2$ em Ω. Sejam

$$\tilde{f}_\lambda(x,t) = \begin{cases} f_\lambda(x, u_0(x)), & \text{se} \quad t \leq u_0(x) \\ f_\lambda(x,t), & \text{se} \quad u_0(x) < t < u_2(x) \\ f_\lambda(x, u_2(x)), & \text{se} \quad t \geq u_2(x) \end{cases} \qquad \tilde{F}_\lambda(x,u) = \int_0^u \tilde{f}_\lambda(x,t)dt$$

e o funcional $\tilde{T}_\lambda : H^1_s(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\tilde{T}_\lambda(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega \tilde{F}_\lambda(x,u)dx.$$

Como u_0 e u_2 são contínuas em $\bar{\Omega}$ então são limitadas em $\bar{\Omega}$. Portanto, $\tilde{f}_\lambda$ é uma função limitada. Sendo assim, $\tilde{F}_\lambda(x,t) \leq ct$ para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$. Pela imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ obtemos

$$\tilde{T}_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - c||u|| = ||u|| \left(\frac{1}{2}||u|| - c \right)$$

para toda $u \in H^1_s(\Omega)$. Assim, $\tilde{T}_\lambda$ é coercivo e limitado inferiormente. Logo $\tilde{T}_\lambda$ possui um mínimo global $u_\lambda \in H^1_s(\Omega)$ e por sua vez u_λ é ponto crítico para $\tilde{T}_\lambda$. Logo,

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) & x \in \Omega \\ u_\lambda = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela definição de $\tilde{f}_\lambda$ temos

$$f_\lambda(x,u_2) \geq \tilde{f}_\lambda(x,u_\lambda) \geq f_\lambda(x,u_0) \geq \lambda u_0^q.$$

Assim, como u_0 é solução do problema (3.15), u_2 é solução do problema (P_{λ_2}) e $\lambda < \lambda_2$ temos

$$\begin{cases} -\Delta(u_0 - u_\lambda) = \lambda_0 u_0^q - \tilde{f}_\lambda(x,u_\lambda) \leq \lambda u_0^q - \tilde{f}_\lambda(x,u_\lambda) \leq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u_0 - u_\lambda = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta(u_\lambda - u_2) = \tilde{f}_\lambda(x,u_\lambda) - f_{\lambda_2}(x,u_2) \leq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u_\lambda - u_2 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Príncipio do Máximo B.17 temos $u_\lambda \equiv u_0$ ou $u_0 < u_\lambda$ em Ω. Mas se $u_\lambda \equiv u_0$ teríamos $-\Delta(u_\lambda - u_0) = 0$ e daí $\tilde{f}_\lambda(x,u_\lambda) = \lambda_0 u_0^q$ o que não é válido pois $u_0 > 0$ e $h \not\equiv 0$. De modo análogo concluimos que $u_\lambda < u_2$ em Ω pois caso contrário, se $u_\lambda \equiv u_2$, teríamos $\tilde{f}_\lambda(x,u_2) = f_{\lambda_2}(x,u_2)$, ou seja

$$\lambda u_2^q + h(x)u_2^p = \lambda_2 u_2^q + h(x)u_2^p \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \lambda_2)u_2^q = 0$$

o que não é válido pois $u_2 > 0$ e $\lambda < \lambda_2$. Logo, $u_0 < u_\lambda < u_2$ em Ω. Pelo Lema A.4, $u_\lambda \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$, daí se $||u - u_\lambda||_{C^1} \leq \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $u_0 < u < u_2$, em Ω. Dessa forma, por definição temos que $\tilde{f}_\lambda(x,u) = f_\lambda(x,u)$, e consequentemente, $T_\lambda(u) = \tilde{T}_\lambda(u)$, para $u_0 < u < u_2$. Portanto, u_λ também é um minimizante local para T_λ, na topologia C^1. ■

O próximo lema nos garante a existência de uma solução para o nosso problema por meio de resultados de minimização.

Lema 3.11 *Seja $\lambda \in (0,\Lambda)$, u_λ é um minimizante local para T_λ em $H^1_s(\Omega)$.*

A prova deste resultado é encontrada nos artigos [15] e [5]. Como consequência deste lema, temos que u_λ é um ponto crítico para o funcional T_λ e por sua vez é solução para o problema (P_λ) e é positiva por construção. Além disso,

$$\begin{aligned} T_\lambda(u_\lambda) &= \tilde{T}_\lambda(u_\lambda) \le \tilde{T}_\lambda(u_0) = \frac{1}{2}||u_0||^2 - \int_\Omega f(x,u_0)u_0 dx \\ &= \frac{1}{2}\lambda\int_\Omega u_0^{q+1}dx - \lambda\int_\Omega u_0^{q+1}dx - \int_\Omega h(x)u_0^{p+1}dx < 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.7 Existência da segunda solução para $\lambda \in (0,\Lambda)$

Na sequência fixamos $\lambda \in (0,\Lambda)$, e esperamos encontrar uma solução do tipo passo da montanha da forma $v_\lambda = u_\lambda + v$, onde u_λ é o minimizante local encontrado no Lema 3.11, e $v > 0$ em Ω. Definimos

$$z_\lambda(x,t) = \begin{cases} f_\lambda(u_\lambda + t) - f_\lambda(u_\lambda) & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$Z_\lambda(x,v) = \int_0^v z_\lambda(x,t)dt$$

e

$$S_\lambda(v) = \frac{1}{2}||v||^2 - \int_\Omega Z_\lambda(x,v)dx.$$

Temos que $S_\lambda : H^1_s(\Omega) \to \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^1.

Precisamos provar que existe um ponto crítico para S_λ que seja uma função positiva.

Lema 3.12 *Seja $\lambda \in (0,\Lambda)$. S_λ tem um ponto crítico não trivial.*

Demonstração: Claramente, $S_\lambda(0) = 0$. Além disso, $v = 0$ é um minimizante local de S_λ para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$. De fato, pela definição de $Z_\lambda(x,v)$, se $v \le 0$ temos que $Z_\lambda(x,v) = 0$, logo $S_\lambda(v) = 0$. Se $v > 0$ temos

$$\begin{aligned} Z_\lambda(x,v) &= \int_0^v z_\lambda(x,t)dt = \int_0^v (f_\lambda(u_\lambda + t) - f_\lambda(u_\lambda))dt \\ &= \int_{u_\lambda(x)}^{u_\lambda(x)+v} f_\lambda(\xi)d\xi - \int_0^v f_\lambda(u_\lambda)dt \\ &= F_\lambda(u_\lambda + v) - F_\lambda(u_\lambda) - f_\lambda(u_\lambda)t \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
S_\lambda(v) &= \frac{1}{2}||v||^2 - \int_\Omega Z_\lambda(x,v)dx \\
&= \frac{1}{2}||v||^2 - \int_\Omega F_\lambda(u_\lambda + v^+)dx + \int_\Omega F_\lambda(u_\lambda)dx - \int_\Omega f_\lambda(u_\lambda)v^+dx \\
&= \frac{1}{2}||v^+||^2 + \frac{1}{2}||v^-||^2 - \frac{1}{2}||u_\lambda + v^+||^2 + T_\lambda(u_\lambda + v^+) \\
&\quad -T_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{2}||u_\lambda||^2 + \int_\Omega f_\lambda(u_\lambda)v^+dx \\
&= \frac{1}{2}||v^-||^2 - \langle u_\lambda, v^+\rangle + T_\lambda(u_\lambda + v^+) - T_\lambda(u_\lambda) + \int_\Omega f_\lambda(u_\lambda)v^+dx \\
&\geq \frac{1}{2}||v^-||^2 + T_\lambda(u_\lambda + v^+) - T_\lambda(u_\lambda) \geq 0,
\end{aligned}$$

pois pelo Lema 3.11 u_λ é um minimizante local para T_λ, daí $T_\lambda(u_\lambda + v^+) - T_\lambda(u_\lambda) \geq 0$. De forma análoga ao Lema 3.5, mostramos que S_λ satisfaz a condição (PS). Além disso, temos

$$\begin{aligned}
S_\lambda(tv) &= \frac{t^2}{2}||v||^2 - \int_\Omega \left(\lambda(u_\lambda + tv^+)^{q+1} + h(x)(u_\lambda + tv^+)^{p+1}\right) dx + t\int_\Omega f_\lambda(u_\lambda)v^+ \\
&= \frac{t^2}{2}||v||^2 - t^q \int_\Omega \frac{\lambda}{q+1}\left(\frac{u_\lambda}{t} + v^+\right)^{q+1} dx \\
&\quad -t^p \int_\Omega \frac{h(x)}{p+1}\left(\frac{u_\lambda}{t} + v^+\right)^{p+1} dx + t\int_\Omega f_\lambda(u_\lambda)v^+dx \\
&< \frac{t^2}{2}||v||^2 - t^{q+1}\frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (v^+)^{q+1}dx - \frac{t^{p+1}}{p+1}\int_\Omega h(x)(v^+)^{p+1}dx.
\end{aligned}$$

Logo $S_\lambda(tv) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Aplicando o Teorema do Passo da Montanha B.6, podemos obter um ponto crítico $v_0 \in H_s^1(\Omega)$ com $v_0 > 0$ em Ω. ■

Observe que, se v_0 é um ponto crítico não trivial de S_λ, então v_0 satisfaz a equação

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = f_\lambda(u_\lambda + v_0) - f_\lambda(u_\lambda) & x \in \Omega \\ v_0 = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.23}$$

Além disso, considerando $v_\lambda = v_0 + u_\lambda$ obtemos

$$-\Delta v_\lambda = -\Delta(v_0 + u_\lambda) = f_\lambda(v_0 + u_\lambda) - f_\lambda(u_\lambda) + f_\lambda(u_\lambda) = f_\lambda(v_\lambda).$$

Logo, $v_\lambda = v_0 + u_\lambda$ é uma solução não trivial de (P_λ) e $v_\lambda \neq u_\lambda$, pois v_0 e u_λ são positivas.

Podemos agora, apresentar a demonstração do Teorema 3.1.

Demonstração: (Teorema 3.1)

(1) Este item é provado atavés dos Lemas 3.11 e 3.12.

(2) Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, pelo Lema 3.11 sabemos que existe uma solução u_λ para o problema (P_λ) e segue de (3.22) que $T_\lambda(u_\lambda) < 0$. Escolha uma sequência $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_n \nearrow \Lambda$ quando $n \to \infty$. Denotamos as soluções correspondentes a λ_n por u_{λ_n}. Então, elas satisfazem

$$T_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0, \quad T'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0.$$

Isto é,

$$\frac{1}{2}||u_{\lambda_n}||^2 - \frac{\lambda_n}{q+1}||u^+_{\lambda_n}||^{q+1}_{q+1} - \frac{1}{p+1}||u^+_{\lambda_n}||^{p+1}_{h,p+1} < 0 \tag{3.24}$$

e

$$||u_{\lambda_n}||^2 - \lambda_n||u^+_{\lambda_n}||^{q+1}_{q+1} - ||u^+_{\lambda_n}||^{p+1}_{h,p+1} = 0. \tag{3.25}$$

Segue por (3.24) e (3.25), que existe $C > 0$ tal que

$$||u_{\lambda_n}|| < C$$

para todo n. Assim, existe uma subsequência fracamente convergente de $\{u_{\lambda_n}\}$, denotada por $\{u_{\lambda_m}\}$ tal que

$$\begin{aligned} u_{\lambda_m} &\rightharpoonup u_\Lambda \quad \text{em} \quad H^1_s(\Omega) \\ u_{\lambda_m} &\to u_\Lambda \quad \text{em} \quad L^{p+1}_h(\Omega) \\ u_{\lambda_m} &\to u_\Lambda \quad \text{em} \quad L^{q+1}(\Omega). \end{aligned}$$

Com argumentos semelhantes aos usados no Lema 3.5 mostramos que $\langle T'_{\lambda_m}(u_{\lambda_m}), v\rangle \to \langle T'_\Lambda(u_\Lambda), v\rangle$ para toda $v \in H^1_s(\Omega)$. Por outro lado, $\langle T'_{\lambda_m}(u_{\lambda_m}), v\rangle = 0$, daí pela unicidade do limite temos que

$$\langle T'_\Lambda(u_\Lambda), v\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_\Lambda \nabla v dx = \Lambda \int_\Omega (u^+_\Lambda)^q v dx + \int_\Omega h(x)(u^+_\Lambda)^p v dx.$$

Portanto, u_Λ é solução fraca para (P_Λ). Pelo Lema A.4, temos que $u_\Lambda \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Além disso, segue do Princípio do Máximo B.17 que u_Λ é uma solução positiva.

(3) Este item segue da definição de Λ, pois

$$\Lambda = \sup\{\lambda > 0 : \text{o problema } (P_\lambda) \text{ tem uma solução}\}.$$

■

Apêndice A

Resultados de Regularidade

Queremos mostrar que o funcional associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{A.1}$$

é de classe $C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ e que a solução $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Além disso, mostraremos que se u é uma solução não negativa e não trivial então $u > 0$.

Proposição A.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e seja g uma função satisfazendo*

(i) $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(ii) existem constantes $r, s \geq 1$ e $a_1, a_2 \geq 0$ tais que $|g(x,\xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{r}{s}}$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}$.

Então a aplicação $\varphi(x) \to g(x, \varphi(x))$ pertence a $C(L^r(\Omega), L^s(\Omega))$.

Demonstração: Sejam $u \in L^r(\Omega)$ e $x \in \bar{\Omega}$. Por (ii), temos

$$\int_\Omega (|g(x,u(x))|)^s\, dx \leq \int_\Omega \left(a_1 + a_2 |u(x)|^{\frac{r}{s}}\right)^s dx.$$

Se $s \geq 1$ temos

$$(|g(x,u(x))|)^s \leq \left(a_1 + a_2 |u(x)|^{\frac{r}{s}}\right)^s \leq 2^s \left(a_1^s + a_2^s |u(x)|^r\right).$$

Tomando $a_3 = max\{a_1, a_2\}$ e $c = 2^s a_3^s$, obtemos

$$|g(x,u(x))|^s \leq 2^s a_3^s \left(1 + |u(x)|^r\right) = c\left(1 + |u(x)|^r\right), \quad \forall \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{A.2}$$

Daí, lembrando que $|\Omega| < \infty$, temos

$$\int_\Omega |g(x,u(x))|^s dx \leq c \int_\Omega \left(1 + |u(x)|^r\right) dx < +\infty.$$

Logo, $g(., u(.)) \in L^s(\Omega)$, e assim, a aplicação $\varphi(x) \to g(x, \varphi(x))$ está bem definida. Vamos verificar a continuidade da aplicação

$$\begin{array}{rcl} G : L^r(\Omega) & \to & L^s(\Omega) \\ \varphi & \mapsto & G(\varphi)(x) = g(x, \varphi(x)). \end{array}$$

Afirmação: Dados $z, \varphi \in L^r(\Omega)$ e $x \in \bar{\Omega}$, considere $F(z) = G(z + \varphi) - G(\varphi)$, com φ fixo. Então, G é contínua em φ se, e somente se, F é contínua em $z \equiv 0$.

De fato, F é contínua em $z \equiv 0$, se e somente se, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \ \delta > 0$ tal que

$$||h - 0||_{L^r(\Omega)} < \delta \Rightarrow ||F(h) - F(0)||_{L^s(\Omega)} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$||h - 0||_{L^r(\Omega)} < \delta \quad \Rightarrow \quad ||G(h + \varphi) - G(\varphi)||_{L^s(\Omega)} < \varepsilon.$$

Escrevendo $\psi(x) = h(x) + \varphi(x)$, temos

$$||\psi - \varphi|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||G(\psi) - G(\varphi)|| < \varepsilon$$

que é a definição da continuidade de G em φ. Portanto é suficiente mostrar que G é contínua em $\phi \equiv 0$ e podemos supor, sem perda de generalidade, que $g(x, 0) = 0$ em Ω. Seja $\varepsilon > 0$. Uma vez que supomos $G(0) = g(\cdot, 0) = 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq \delta \quad \Rightarrow \quad ||G(u)||_{L^s(\Omega)} < \varepsilon.$$

Como $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, dado $\hat{\varepsilon}$, para cada $x \in \bar{\Omega}$, existe $\delta_x > 0$ tal que, usando a equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$.

$$||z - x|| + |\xi| \leq \delta_x \quad \Rightarrow \quad |g(z, \xi) - g(x, 0)| < \hat{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad |g(z, \xi)| < \hat{\varepsilon}.$$

As bolas $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ formam uma cobertura para $\bar{\Omega}$ que é compacto, logo esta admite uma subcobertura finita, ou seja, $\exists x_1, ..., x_k \in \bar{\Omega}$ tais que

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \frac{\delta_i}{2}), \text{ com } \delta_i = \delta_{x_i}.$$

Seja $\delta_1 = \min\limits_{1 \leq i \leq k} \delta_i$. Sejam $z \in \bar{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}$ com $|\xi| \leq \frac{\delta_1}{2}$. Como $z \in \bar{\Omega}, \exists i$ tal que $z \in B(x_i, \frac{\delta_i}{2})$ e ainda $|\xi| \leq \frac{\delta_1}{2} \leq \frac{\delta_i}{2}$ então

$$||z - x_i|| + |\xi| \leq \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i \quad \Rightarrow \quad ||g(z, \xi) - g(x_i, 0)|| < \hat{\varepsilon}.$$

Logo, dado qualquer $\hat{\varepsilon} > 0$, existe $\beta > 0$ tal que

$$|\xi| \leq \beta \quad \Rightarrow \quad |g(x, \xi)| \leq \hat{\varepsilon}, \forall \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{A.3}$$

Agora, para $\hat{\varepsilon} > 0$ e $\delta > 0$ a serem escolhidos, seja $u \in L^r(\Omega)$ com $||u||_{L^r(\Omega)} \leq \delta$ e considere o conjunto

$$\Omega_1 \equiv \{x \in \bar{\Omega}; |u(x)| \leq \beta\}.$$

Logo, $u(x) \in \mathbb{R}$ por (A.2) temos $|g(x, u(x))| < \hat{\varepsilon}$, o que implica que

$$\int\limits_{\Omega_1} |g(x, u(x))|^s dx < \int\limits_{\Omega_1} \hat{\varepsilon}^s dx \leq \hat{\varepsilon}^s |\Omega_1| \leq \hat{\varepsilon}^s |\Omega|. \tag{A.4}$$

pois $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}$ e $|\Omega_1| \leq |\bar{\Omega}| = |\Omega|$ onde $|\Omega|$ determina a medida de Lebesgue de Ω. Escolha $\hat{\varepsilon}$ tal que $(\hat{\varepsilon})^s |\Omega| \leq \dfrac{\varepsilon^s}{2}$. Então por (A.3)

$$\int\limits_{\Omega_1} |g(x, u(x))|^s dx \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Seja $\Omega_2 = \bar{\Omega} \setminus \Omega_1$. Então, por (A.2) temos que

$$\int_{\Omega_2} |g(x, u(x))|^s dx \leq c \int_{\Omega_2} (1 + |u(x)|^r)\, dx \leq c(|\Omega_2| + \delta^r) \tag{A.5}$$

pois $||u||_{L^r(\Omega)} \leq \delta$. Além disso, $\Omega_2 = \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \equiv \{x \in \bar{\Omega}; |u(x)| > \beta\}$, daí

$$\int_{\Omega_2} |u(x)|^r dx \geq \int_{\Omega_2} \beta^r dx \Rightarrow \int_{\Omega_2} |u(x)|^r dx \geq \beta^r |\Omega_2|.$$

Logo, $\delta^r \geq \displaystyle\int_{\Omega_2} |u(x)|^r dx \geq \beta^r |\Omega_2|$, o que implica que $|\Omega_2| \leq (\delta \beta^{-1})^r$. Assim substituindo em (A.5) temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |g(x, u(x))|^s dx &\leq c(|\Omega_2| + \delta^r) \\ &\leq c[((\delta\beta^{-1})^r + \delta^r)] \\ &\leq c((\beta^{-1})^r + 1)\delta^r. \end{aligned}$$

Escolhendo δ tal que $c((\delta\beta^{-1})^r + 1)\delta^r \leq \dfrac{\varepsilon^s}{2}$, obtemos

$$\int_{\Omega_2} |g(x, u(x))|^s dx \leq \frac{\varepsilon^s}{2}. \tag{A.6}$$

Logo, por (A.5) e (A.6) temos que

$$\int_{\Omega} |g(x, u(x))|^s dx \leq \frac{\varepsilon^s}{2} + \frac{\varepsilon^s}{2} = \varepsilon^s \quad \Rightarrow \quad ||g(., u)||_{L^s(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Portanto,

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq \delta \quad \Rightarrow \quad ||g(., u)||_{L^s(\Omega)} \leq \epsilon$$

■

A proposição a seguir é devida ao Teorema de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e o Teorema de Rellich-Kondrachov.

Proposição A.2 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira é uma variedade suave. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ então $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ (com $n \geq 3$) e para todo $t \in [1, 2n(n-2)^{-1}]$ existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$||u||_{L^t(\Omega)} \leq c||u||$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, a aplicação inclusão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$$

é compacta para $t \in [1, 2n(n-2)^{-1})$.

Estabeleceremos a seguir um resultado de regularidade para funcionais.

Proposição A.3 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira é uma variedade suave. Seja g satisfazendo*

(i) $g(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(ii) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|g(x, \xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s$$

onde $0 \leq s < (n+2)(n-2)^{-1}$ e $n \geq 3$. Se $G(x, \xi) \equiv \int_0^\xi g(x, t)dt$ e

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G(x, u)\right) dx$$

então

$$I \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right) \text{ e } I'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - g(x, u)\varphi)dx$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, $J(u) \equiv \int_\Omega G(x, u(x))dx$ é fracamente contínuo e $J'(u)$ é compacto.

Demonstração: Escrevemos $I(u) = N(u) + J(u)$, onde $N(u) = \frac{1}{2}||u||^2$. Note que, $N \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, pois $N(u)$ é contínuo e ainda

$$\begin{aligned}
N'(u)\varphi &= \lim_{t \to 0} \frac{N(u + t\varphi) - N(u)}{t} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{||u + t\varphi||^2 - ||u||^2}{t} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{(||u||^2 + 2t\langle u, v\rangle + t^2||\varphi||^2 - ||u||^2)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} (\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + t||\varphi||^2) \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \langle u, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Daí a bilinearidade do produto interno garante a linearidade de $N' : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Se $||\varphi|| \leq 1$ então

$$|N'u\varphi| = \left| \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \right| = |\langle u, \varphi \rangle| \leq ||u|| ||\varphi||$$

o que implica que

$$||N'u||_{H^{-1}} \leq ||u||.$$

Logo N' é limitado e por sua vez é contínuo. Mostraremos agora que $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Dividimos esta demonstração em três passos.

1º Passo: J está bem definido e é fracamente contínuo.

2º Passo: J é Fréchet diferenciável.

3º Passo: J' é compacto.

(1º) Para mostrar que J está bem definido, basta mostrar que $G(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned} |G(x,\xi)| = \left| \int_0^\xi g(x,t)dt \right| &\leq \int_{\min\{0,\xi\}}^{\max\{0,\xi\}} |g(x,t)|dt \\ &\leq \int_0^{|\xi|} (a_1 + a_2|t|^s)\, dt = a_1|\xi| + \frac{a_1}{(s+1)}|\xi|^{s+1} = a_1|\xi| + \hat{a}_2|\xi|^{s+1}. \end{aligned}$$

Note que, se $|\xi| \leq 1$

$$|G(x,\xi)| \leq a_1 + \hat{a}_2|\xi|^{s+1}$$

e se $|\xi| > 1$

$$|G(x,\xi)| \leq a_1|\xi|^{s+1} + \hat{a}_2|\xi|^{s+1} \leq 1 + a_3|\xi|^{s+1}.$$

Logo existem $c, d > 0$ tais que

$$|G(x,\xi)| \leq c + d|\xi|^{s+1}$$

com $1 \leq s+1 < 2^*$. Além disso, $G \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, logo satisfaz as condições (i)-(ii) da Proposição A.1, com $r = 1$. Portanto, a aplicação $\varphi \mapsto G(\cdot, \varphi(.)) \in C(L^{s+1}(\Omega), L^1(\Omega))$. Pela Proposição A.2 temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}(\Omega)$ com imersão compacta. Logo $G(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo J está definido em $H_0^1(\Omega)$. Para mostrar que J é fracamente contínuo, seja $u_m \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então $u_m \to u$ em $L^{s+1}(\Omega)$ pela Proposição A.2 , pois $s+1 < 2^*$. Como $G \in C(L^{s+1}(\Omega), L^1(\Omega))$, temos que $G(\cdot, u_m(\cdot)) \to G(\cdot, u(\cdot))$ em $L^1(\Omega)$ daí,

$$\left| \int_\Omega G(x, u_m(x)) - G(x, u(x))dx \right| \leq \int_\Omega |G(x, u_m(x)) - G(x, u(x))|dx \to 0.$$

Logo, $J(u_m) \to J(u)$ e J é fracamente contínuo.

(2º) Mostraremos agora que J é Fréchet diferenciável em $H_0^1(\Omega)$. Inicialmente, observe que por (ii) temos

$$|g(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^{\frac{\alpha s}{\alpha}}$$

para todo $\alpha \geq 1$ e $\forall \ \ x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}$. Daí, pela Proposição A.1, $p \in C(L^{\alpha s}(\Omega), L^{\alpha})$. Em particular, para $\alpha = \frac{s+1}{s}$, temos $p \in C(L^{s+1}(\Omega), L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega))$. Daí

$$\int_{\Omega} |g(x,u)\varphi| dx \leq ||g(x,u)||_{L^{\frac{s+1}{s}}} ||\varphi||_{L^{s+1}} < \infty, \quad \forall u, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Seja $u \in H_0^1$. Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, u)$ tal que

$$\left| J(u+\varphi) - J(u) - \int_{\Omega} g(x,u)\varphi dx \right| \leq \varepsilon ||\varphi||, \quad \text{sempre que} \quad ||\varphi|| \leq \delta.$$

Mostraremos que $\delta = \delta(\varepsilon, ||u||)$ e J é uniformemente diferenciável em um conjunto limitado. Dado $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Escrevendo $\psi \equiv |G(x, u(x)+\varphi(x)) - G(x, u(x)) - g(x, u(x))\varphi(x)|$ temos que

$$|J(u+\varphi) - J(u) - \int_{\Omega} g(x,u)\varphi(x) dx| = \int_{\Omega} \psi dx.$$

Defina

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &\equiv \left\{ x \in \bar{\Omega}; |u(x)| \geq \beta \right\} \\
\Omega_2 &\equiv \left\{ x \in \bar{\Omega}; |\varphi(x)| \geq \gamma \right\} \\
\Omega_3 &\equiv \left\{ x \in \bar{\Omega}; |u(x)| \leq \beta \ \ e \ \ |\varphi(x)| \geq \gamma \right\}
\end{aligned}$$

com β e γ a serem escolhidos adequadamente. Logo, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i$ (união não disjunta)

$$\int_{\Omega} \psi dx \leq \int_{\Omega_1} \psi dx + \int_{\Omega_2} \psi dx + \int_{\Omega_3} \psi dx$$

Tomando $f(t) = G(x, \xi + t\eta) - G(x, \xi)$ com $t \in [0,1]$, temos $f \in C^1$ e pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ com $\theta(x, \xi, \eta)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(\theta)$. Mas

$$\begin{aligned}
f'(\theta) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\theta+t) - f(\theta)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{G(x, \xi + \theta\eta + t\eta) - G(x, \xi + \theta\eta)}{t} \\
&= G'_u(x, \xi + \theta\eta)\eta \\
&= g(x, \xi + \theta\eta)\eta
\end{aligned}$$

o que implica $G(x, \xi+\eta) - G(x,\xi) = p(x, \xi + \theta\eta)\eta$. Logo pela condição (ii)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |G(x,u(x)+\varphi(x)) - G(x,u(x))|dx &= \int_{\Omega_1} |g(x,u(x)+\theta\varphi(x))\varphi(x)|dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} [a_1 + a_2|u(x)+\theta\varphi(x)|^s]|\varphi(x)|dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} [a_1 + a_2 2^s\left(|u|^s + \theta^s|\varphi|^s\right)]\,|\varphi|dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} \left[a_1|\varphi| + \hat{a}_2\left(|u|^s|\varphi| + |\varphi|^{s+1}\right)\right] dx. \quad \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

Vamos estimar cada uma dessas parcelas separadamente. Pela desigualdade de Holder temos

$$\int_{\Omega_1} |\varphi(x)|dx \leq |\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} ||\varphi||_{L^{2^*}}.$$

Uma vez que $\dfrac{s}{s+1} + \dfrac{1}{2^*} < 1$, existe $\sigma > 1$ tal que $\dfrac{s}{s+1} + \dfrac{1}{2^*} + \dfrac{1}{\sigma} = 1$. Assim, pela desigualdade de Holder temos

$$\int_{\Omega_1} |u(x)|^s|\varphi(x)|dx \leq |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} ||u||^s_{L^{s+1}} ||\varphi||_{L^{2^*}}.$$

Temos que

$$\int_{\Omega_1} |\varphi(x)|^s|\varphi(x)|dx \leq |\Omega_1|^{\frac{1}{\delta}} ||\varphi||^s_{L^{s+1}} ||\varphi||_{L^{2^*}}.$$

Logo por (A.7) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |G(x,u(x)+\varphi(x)) - G(x,u(x))|dx &\leq a_1|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} ||\varphi||_{L^{2^*}} + a_3(|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} ||u||^s_{L^{s+1}(\Omega)} ||\varphi||_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\quad + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} ||\varphi||^s_{L^{s+1}(\Omega)} ||\varphi||_{L^{2^*}}(\Omega)) \\
&\leq a_1|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} c||\varphi|| + a_3|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} c_1(||u||^s + ||\varphi||^s)||\varphi|| \\
&= a_4||\varphi||[|\Omega|^{\frac{n+2}{2n}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}}(||u||^s + ||\varphi||^s)]. \quad \text{(A.8)}
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |g(x,u(x))\varphi(x)|dx &\leq \int_{\Omega_1} (a_1 + a_2|u(x)|)^s\,|\varphi(x)|dx \\
&\leq a_1\int_{\Omega_1} |\varphi(x)|dx + a_2\int_{\Omega_1} |u(x)|^s|\varphi(x)|dx \\
&\leq a_1|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} ||\varphi||_{L^{2^*}}(\Omega) \\
&\quad + a_2|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} ||u||^s_{L^{s+1}(\Omega)} ||\varphi||_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\leq a_5||\varphi||[|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} ||u||^s]. \quad \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

Além disso, pela proposição anterior, existe $a_6 > 0$ tal que $||u|| \geq a_6||u||_{L^2} \geq a_6\beta|\Omega_1|^{\frac{1}{2}}$. Logo

$$|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\frac{||u||}{a_6\beta}\right)^{\frac{2}{\sigma}} \equiv M_1 \quad \text{e} \quad |\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} \leq \left(\frac{||u||}{a_6\beta}\right)^{\frac{n+2}{n}} \equiv M_2$$

assim, se $\beta \to \infty$ então $M_1,\ M_2 \to 0$. Daí, por (A.8) e (A.9) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \psi dx &= \int_{\Omega_1} |G(x, u(x) + \varphi(x)) - G(x, u(x)) - g(x, u(x))\varphi(x)| dx \\
&\leq a_7 ||\varphi|| [M_2 + M_1(||u||^s + ||\varphi||^s)].
\end{aligned}$$

Podemos escolher β suficientemente grande tal que

$$a_7[M_2 + M_1(||u||^s + 1)] \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim,

$$||\varphi|| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega_1} \psi dx \leq \frac{\varepsilon}{3} ||\varphi||.$$

Da mesma forma mostramos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \psi dx &= \int_{\Omega_2} |G(x, u(x) + \varphi(x)) - G(x, u(x)) - g(x, u(x))\varphi(x)| dx \\
&\leq \int_{\Omega_2} |g(x, u(x) + \theta\varphi(x))| + |g(x, u(x))| |\varphi(x)| dx \\
&\leq \int_{\Omega_2} [a_1 + a_2(|u(x)| + |\varphi(x)|)^s + a_1 + a_2|u(x)|^s] |\varphi(x)| dx \\
&\leq a_4 \left(\int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s]^{\frac{s+1}{s}}\right)^{\frac{s}{s+1}} \left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1}\right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&\leq a_4 \left(\int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s]^{\frac{s+1}{s}}\right)^{\frac{s}{s+1}} ||\varphi||_{L^{s+1}(\Omega_2)}. \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

onde $\dfrac{s}{s+1} + \dfrac{1}{s+1} = 1 \quad \text{e} \quad 1 < s+1 < 2^*$. Temos ainda

$$\begin{aligned}
a_4 \left[\left(\int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s]^{\frac{s+1}{s}}\right)^{\frac{1}{s+1}}\right]^s &\leq k[|\Omega_2|^{\frac{1}{s+1}} + ||u||_{L^{s+1}(\Omega_2)} + ||\varphi||_{L^{s+1}(\Omega_2)}]^s \\
&\leq c_1(1 + ||u||^s_{L^{s+1}(\Omega_2)} + ||\varphi||^s_{L^{s+1}(\Omega_2)}) \\
&\leq c\,(1 + ||u||^s + ||\varphi||^s)\,.
\end{aligned}$$

Como em Ω_2 tem-se $|\varphi(x)| \geq \gamma$ então $\left(\frac{|\varphi(x)|}{\gamma}\right)^k \geq 1$, para todo $k > 0$, em particular para $k = 2^* - (s+1) > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1}\right)^{\frac{1}{s+1}} &\leq \left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1} \left(\frac{|\varphi(x)|}{\gamma}\right)^{2^*-(s+1)} dx\right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&= \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} ||\varphi||^{\frac{2^*}{s+1}}_{L^{2^*}(\Omega_2)} \\
&\leq c\ \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} ||\varphi||^{\frac{2^*}{s+1}}.
\end{aligned}$$

Assim, por (A.10) temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \psi dx &\leq a(1+||u||^s+||\varphi||^s)(c_1\gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}}||\varphi||^{\frac{2^*}{s+1}}) \\
&\leq k\gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}}(1+||u||^s+||\varphi||^s)||\varphi||^{\frac{2^*}{s+1}}.
\end{aligned}$$

Como por (i), $p \in C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, então $G \in C^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, ou seja, dados quaisquer $\hat{\varepsilon},\hat{\beta} > 0$, existe um $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\varepsilon},\hat{\beta})$ tal que

$$|G(x,t+h) - G(x,t) - g(x,t)h| \leq \hat{\varepsilon}|h|$$

sempre que $x \in \bar{\Omega}, |t| \leq \hat{\beta}$ e $|h| \leq \hat{\gamma}$. Em particular, se $\hat{\beta} \equiv \beta$ e $\gamma \leq \hat{\gamma}$, temos pela proposição anterior que existe $a > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_3} \psi dx &= \int_{\Omega_3} |G(x,u(x)+\varphi(x)) - G(x,u(x)) - g(x,u(x))\varphi(x)|dx \\
&\leq \int_{\Omega_3} \hat{\varepsilon}|\varphi(x)|dx \\
&= \hat{\varepsilon}||\varphi||_{L^1(\Omega_3)} \\
&\leq a\hat{\varepsilon}||\varphi||.
\end{aligned}$$

Escolha $\hat{\varepsilon}$ tal que $3a\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$. Isto determina $\hat{\gamma}$. Escolha $\gamma = \hat{\gamma}$. Assim, como

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \psi dx &\leq \int_{\Omega_1} \psi dx + \int_{\Omega_2} \psi dx + \int_{\Omega_3} \psi dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3}||\varphi|| + k\gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}}(1+||u||^s+||\varphi||^s)||\varphi||^{\frac{2^*}{s+1}} + a\hat{\varepsilon}||\varphi|| \\
&\leq \frac{\varepsilon||\varphi|| + 3k\gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}}(1+||u||^s+||\varphi||^s)||\varphi||^{\frac{2^*}{s+1}} + \hat{\varepsilon}||\varphi||}{3} \\
&= \frac{2\varepsilon}{3}||\varphi|| + k\gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}}(1+||u||^s+||\varphi||^s)||\varphi||^{\frac{2^*}{s+1}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, escolha δ suficientemente pequeno tal que se $||\varphi|| \leq \delta$ e $\delta \leq 1$ temos

$$k\gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}}(2+||u||^s)\delta^{\frac{2^*}{s+1}-1} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

daí, obtemos

$$\int_\Omega \psi dx \leq \varepsilon||\varphi||$$

e por sua vez

$$|J(u+\varphi) - J(u) - \int_\Omega g(x,u)\varphi dx| \leq \int \psi dx \leq \varepsilon||\varphi||,$$

ou seja, J é Fréchet diferenciável.

(3º) Para mostrar que J' é compacto. Se $u_m \to u$ em $L^{s+1}(\Omega)$, então $J'(u_m) \to J'(u)$.

Pela desigualdade de Holder temos

$$\begin{aligned}
||J'(u_m) - J'(u)|| &= \sup_{||\varphi||\leq 1} \left| \int_\Omega (g(x,u_m(x)) - g(x,u(x)))\varphi(x)dx \right| \\
&\leq \sup_{||\varphi||\leq 1} \left(\int_\Omega |g(.,u_m(x)) - g(.,u(x))|^{\frac{s+1}{s}} \right)^{\frac{s}{s+1}} \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^{s+1} \right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&\leq \sup_{||\varphi||\leq 1} a||g(.,u_m) - g(.,u)||_{L^{\frac{s+1}{s}}} ||\varphi|| \\
&\leq a||g(.,u_m) - g(.,u)||_{L^{\frac{s+1}{s}}}
\end{aligned}$$

e como $p \in C(L^{s+1}(\Omega), L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega))$ segue que

$$||g(.,u_m) - g(.,u)||_{L^{\frac{s+1}{s}}} \to 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty.$$

Logo

$$||J'(u_m) - J'(u)|| \to 0.$$

Seja $(u_m) \in H_0^1(\Omega)$ sequência limitada. Queremos mostrar que J' é compacto, ou seja, que existe uma subsequência de $(J'(u_m))$ convergente em $H^{-1}(\Omega)$. Como (u_m) é limitada, então (u_m) possui uma subsequência fracamente convergente, $u_{m_k} \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Utilizando a Proposição A.2, a menos de subsequência

$$u_{m_k} \to u \quad \text{em} \quad L^{s+1}(\Omega)$$

o que implica que $J'(u_{m_k}) \to J'(u)$. Logo, J' leva sequência limitada em sequência que possui subsequência convergente. Portanto J' é compacto. ■

Mostraremos a regularidade da solução do problema (A.1).

Proposição A.4 *Se* $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ *é solução fraca do problema* (A.1) *então* $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$. *Além disso, se* $u \geq 0$ *e* u *é não trivial então* $u > 0$.

Demonstração: Usando o Teorema B.10 temos que $u \in L^b(\Omega)$, para todo $b < \infty$. Assim, pelo Teorema B.11 temos que $u \in W^{2,a}(\Omega) \cap W_0^{1,a}(\Omega)$ e por sua vez, pelo Teorema B.9 temos que $u \in L^\infty(\Omega)$. Temos então que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, (veja Teorema 7.26 Trudinger). Aplicando o Teorema B.14 obtemos que u é positiva em Ω. De fato, se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$, tome $R > 0$ pequeno de modo que $B_{4R} \subset \Omega$ e pela Desigualdade de Harnack, Teorema B.14 existe $c > 0$ tal que

$$0 \leq \sup_{B_R(x_0)} u \leq c \inf_{B_R(x_0)} u = u(x_0) = 0$$

o que implica que

$$u \equiv 0 \quad \text{em} \quad B_R(x_0).$$

Assim $A = \{x \in \Omega; u(x) = 0\}$ é aberto em Ω. Sendo u contínuo, segue que A é fechado. Como Ω é conexo, então $A = \Omega$ ou $A = \emptyset$. Se $A = \Omega$ temos que $u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, o que é um absurdo. Logo $A = \emptyset$, dessa forma u é uma solução positiva para (A.1).

$\blacksquare$

Apêndice B

Resultados básicos

Enunciaremos aqui alguns resultados utilizados em nosso trabalho e indicaremos as referências onde podem ser encontradas as respectivas demonstrações.

Teorema B.1 ([2], Desigualdade de Hölder) *Assuma que $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq ||f|_{L^p}||g||_{L^{p'}}.$$

Definição B.2 *Sejam X um espaço de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de vínculos*

$$V := \{u \in X : F(u) = 0\}.$$

Suponhamos que para todo $u \in V$, temos que $F'(u) \neq 0$. Seja $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é valor crítico de J sobre V se existem $u \in S$ e $\theta \in R$ tais que $J(u) = c$ e $J'(u) = \theta F'(u)$. O ponto u é um ponto crítico de J sobre V e o número real θ é chamado multiplicador de Lagrange para o valor crítico c.

Teorema B.3 ([3], Multiplicadores de Lagrange) *Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e suponha que $\mathcal{M} \subset X$ é uma C^1-subvariedade de codimensão k, $\mathcal{M} = \{u \in \Omega : \psi_j(u) = 0, j = 1, 2, ..., k\}$ onde $\psi_j \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $j = 1, 2, ..., k$, $\Omega \subset X$ é um conjunto aberto e $\psi_1'(u), \psi_2'(u), ..., \psi_k'(u)$ são linearmente independentes para cada $u \in \Omega$. Então se $\widehat{u} \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de $\psi|\mathcal{M}$ então existe $\widehat{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ tal que*

$$\varphi'(\widehat{u}) = \widehat{\theta}\psi'(\widehat{u}) = \sum_{j=1}^{k} \theta_j \psi_j'(\widehat{u}).$$

Teorema B.4 ([11], Teorema do Passo da Montanha) *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Suponha que $I(0) = 0$ e*

(I) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;

(II) existe $e \in H_0^1(\Omega) \setminus \bar{B}_\rho$ *tal que* $I(e) \leq 0$.

Então I *possui um valor crítico* $c \geq \alpha$. *Além disso,* c *pode ser caracterizado como*

$$c_{PM} = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u),$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = 0, g(1) = e\}.$$

Definição B.5 *Um subconjunto fechado* H *de um espaço de Banach* X *separa dois pontos* u *e* v *em* X *se* u *e* v *pertencem a componentes conexas disjuntas de* $X \backslash H$. *Denotamos por* Γ_u^v *o conjunto de todos os caminhos contínuos ligando* u *e* v, *isto é,*

$$\Gamma_u^v = \{g \in C([0,1], X) : g(0) = u \text{ e } g(1) = v\}$$

O teorema a seguir é uma versão geral do Teorema do Passo da Montanha.

Teorema B.6 ([9], Teorema (1.bis)) *Suponha que* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *é Gâteaux diferenciável em um espaço de Banach* X. *Sejam* u *e* v *dois pontos em* X *e*

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \varphi(g(t))$$

onde $\Gamma = \Gamma_u^v$. *Seja* F *um subconjunto fechado de* X *tal que* $F \cap \{x \in X : \varphi(x) \geq c\}$ *separa* u *e* v. *Assuma que* φ *satisfaz* (PS) *então existe um ponto crítico de* φ *em* F *com valor crítico* c.

Teorema B.7 ([12], Princípio Variacional de Ekeland) *Seja* V *um espaço métrico completo, e* $F : V \to \mathbb{R} \cup (+\infty)$ *uma função semicontínua inferiormente,* $\neq +\infty$. *Então para quaisquer* $\epsilon, \delta > 0$ *e qualquer* $u \in V$ *com*

$$F(u) \leq \inf_V F + \epsilon,$$

existe um elemento $\nu \in V$ *minimizando estritamente o funcional*

$$F_\nu(w) \equiv F(w) + \frac{\epsilon}{\delta} d(\nu, w)$$

Além disso, temos

$$F(\nu) \leq F(u) \quad e \quad d(u, \nu) \leq \delta$$

Teorema B.8 ([2], Teorema 4.9) *Seja* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e seja* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $f_n \to f$ *em* $L^p(\Omega)$. *Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que* *(a)* $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω*.*

Teorema B.9 ([2], Teorema de Morrey) *Seja* $1 \leq p \leq \infty$*. Temos*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega), \quad \forall b \in [p, +\infty), \quad se \quad p > N,$$

com imersão contínua.

Teorema B.10 ([12], Lema B.3) *Seja* Ω *um domínio em* $\mathbb{R}^N$ *e seja* $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory tal que*

$$|g(x,u)| \leq c(x)(1 + |u|) \quad q.t.p \ em \quad \Omega,$$

com $0 \leq c(x) \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$*. Se* $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *é uma solução fraca da equação*

$$-\Delta u = g(x,u) \quad em \quad \Omega,$$

então $u \in L^b_{loc}(\Omega)$ *para qualquer* $b < \infty$*. Se* $u \in H^{1,2}_0(\Omega)$*, e* $c \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$*, então* $u \in L^b(\Omega)$ *para qualquer* $b < \infty$*.*

Teorema B.11 ([13], Teorema 9.15) *Seja* Ω *um domínio de classe* $C^{1,1}$ *em* $\mathbb{R}^N$*. Então se* $h \in L^p(\Omega)$*, com* $1 < p < \infty$*, o problema de Dirichlet* $-\Delta u = h$ *em* Ω*,* $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ *tem uma única solução* $u \in W^{2,p}(\Omega)$*.*

Teorema B.12 ([2], Teorema de Schauder) *Suponha que* Ω *é limitado e de classe* $C^{2,\alpha}$ *com* $0 < \alpha < 1$*. Então para cada* $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ *existe uma única solução* $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ *do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega \\ \quad u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema B.13 ([4], Teorema 2.1) *Suponhamos que o problema* $-\Delta u = f(u)$ *possua uma subsolução* $\underline{u}$ *e uma supersolução* $\bar{u}$*, com* $\underline{u} \leq \bar{u}$ *em* Ω*. Suponhamos ainda, que* f *seja de classe* C^k *e*

$$f(t_1) - f(t_2) \leq -c\,(t_1 - t_2)\,;$$

para alguma constante $c \geq 0$ *e para todo* $t_1 \geq t_2$*,* $|t_1|; |t_2| \leq \max\{||\underline{u}||_\infty, ||\bar{u}||_\infty\}$*. Então o problema possui soluções* $U; V \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$*; tais que* $\underline{u} \leq U \leq V \leq \bar{u}$*. Além disso, qualquer solução* u *com* $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ *é tal que* $U \leq u \leq V$*, ou seja,* U *é solução mínima e* V *é solução máxima com respeito ao intervalo* $[\underline{u}, \bar{u}]$*.*

Teorema B.14 ([13], Desigualdade de Harnack) *Seja o operador* $Lu = -\Delta u + c(x)u$ *com* $c \in C^{\infty}(\Omega)$ *e seja* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *satisfazendo* $u \geq 0$ *e* $Lu = 0$ *em* Ω*. Então para qualquer bola* $B_{4R}(y) \subset \Omega$*, temos*

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u$$

onde $C = C(N, R, ||c||_{L^{\infty}})$*.*

Teorema B.15 ([7], Fórmula de Green) *Seja* $u, v \in C^2(\Omega)$*. Então*

$$\int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Teorema B.16 ([7], Lema de Hopf) *Assuma que* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$*. Seja* Lu *definido como em B.14. Assuma ainda que,* $Lu \geq 0$ *em* Ω *e que exista um ponto* $x_0 \in \partial\Omega$*, tal que*

$$u(x_0) \leq u(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

Finalmente, suponhamos que Ω *satisfaz a condição da bola interior em* x_0*, isto é, que existe uma bola* $B \in \Omega$ *com* $x_0 \in \partial\Omega$*. Então,*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$$

onde ν *é o vetor normal unitário a bola* B *em* x_0*. Se* $c \geq 0$ *em* Ω*, a mesma conclusão é válida desde que* $u(x_0) \leq 0$*.*

Teorema B.17 ([7], Princípio do Máximo Forte) *Suponha que* Ω *é conexo, que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$*. Seja* Lu *definido como em B.14.*

(i) Se $Lu \leq 0$ *em* Ω *e* u *atinge o máximo não negativo sobre* $\bar{\Omega}$ *em um ponto interior, então* u *é constante em* Ω*;*

(ii) Similarmente, se $Lu \geq 0$ *em* Ω *e* u *atinge um mínimo não negativo sobre* $\bar{\Omega}$ *em um ponto interior, então* u *é constante em* Ω*.*

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti, A.; Brezis, H.; Cerami, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994), 519 a 543.

[2] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer - Verlag, 2010.

[3] Costa, D. G., *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin 2007, 138 pages, ISBN 978-0-8176-4535-9. Price (softcover): 39.90 EUR.

[4] de Figueiredo, D. G., *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems, Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais*, IME-USP, São Paulo, 1981.

[5] de Figueiredo, D. G.; Solimini, S., *A variational approach to superlinear elliptic problems*, American Mathematical Society 7, (1984), 699 a 717.1532 a 4133

[6] de Lima, A. A., *O Método de Sub e Supersolução e Aplicações a Problemas Elípticos.* Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, 2011.

[7] Evans, L. C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.

[8] Gao, J.; Zhang Y.; Zhao P., *Existence of positive solutions for a class of semilinear and quasilinear elliptic equations with supercritical case*, J. Math. Anal. Appl. 381, (2011), 215 a 228.

[9] Ghoussoub, N.; Preiss, D., *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points*, Ann. Int. H. Poincaré Anal. Non linéaire 6, (1989), 321 a 330.

[10] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[11] Rabinowitz, P. H., *Minimax Methods in Critical Point Theory With Applications to Differential Equations*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 1984.

[12] Struwe, M., *Variational Methods - Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Springer, 4th Edition, 2008.

[13] Trudinger, N. S., *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 721 a 747.

[14] Wu, T.-F., *On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function*, J. Math. Anal. Appl. 318 (2006), 253 a 270.

[15] Brezis, H.; Nirenberg, L., *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. I Math. 317 (5) (1993), 465 a 472.

[16] Wang, W.Z., *Sobolev embeddings involving symmetry*, Bull. Sci. Math. 130 (2006), 269 a 278.