

Programa de Doutorado em Matemática - UFPB/UFCG
Exame de Qualificação em Variedades Diferenciáveis (15/08/2011)

Nome : _____ Matrícula : _____

Questão 1. (1,5 pontos) Sejam $F, G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis dadas por $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2)$ e $G(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Para que valores reais $a, b \geq 0$ o conjunto $S_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid F(x) = a \text{ e } G(x) = b\}$ é uma variedade diferenciável? Justifique sua resposta.

Questão 2. (2 ponto)

- (a) Prove que não existe uma submersão $F : S^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
- (b) Sejam M uma variedades diferenciável e $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tais que $dF_p \neq 0$ para todo $p \in M$. Prove que M não é uma variedade compacta.

Questão 3. (2 ponto)

- (a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove que S^{2n} não admite uma estrutura de grupo de Lie.
- (b) Seja X um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que existe uma constante $c > 0$ tal que $\|X(p)\| \leq c$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Prove que X é um campo de vetores completo.

Questão 4. (1,5 pontos) Sejam X_1 e X_2 campos de vetores em $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Existe uma subvariedade diferenciável M de dimensão 2 em $\mathbb{R}^4$ tal que para cada $p \in M$, $X_1(p), X_2(p) \in T_p M$? Justifique sua resposta.

Questão 5. (1,5 pontos) Sejam M uma variedade Riemanniana com métrica dada por $\langle, \rangle$ e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que existe um único campo de vetores ∇f em M tal que $\langle \nabla f(p), \gamma'(0) \rangle = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)$, onde $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ é uma curva diferenciável e $\gamma(0) = p$.

Questão 6. (1,5 pontos) Sejam M um variedade diferenciável de dimensão n e w uma k -forma diferenciável em M , onde k é uma número par. Prove que $w \wedge dw$ é uma k -forma diferencial exata.