



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística

Programa de Doutorado em Matemática
Exame de Qualificação em Geometria Riemanniana
João Pessoa/Campina Grande, 05 de agosto de 2013

Banca Examinadora:

Prof. Henrique Fernandes de Lima (UFCG)

Prof. Pedro A. Hinojosa (UFPB)

Aluno: _____ Nota: _____

1 Seja M^n uma variedade Riemanniana. Considere a aplicação

$$P = P_{c,t_0,t} : T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$$

definida por: $P(v)$, $v \in T_{c(t_0)}M$, é o transporte paralelo do vetor v ao longo da curva c . Mostre que P é uma isometria e que, supondo M^n orientada, P preserva a orientação.

2 Seja M^n uma variedade Riemanniana n -dimensional.

(a) Defina o tensor de Ricci e a curvatura escalar de M^n ;

(b) Prove que a curvatura escalar $S(p)$ em $p \in M^n$ é dada por:

$$S(p) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Ric_p(x) d\sigma,$$

onde ω_{n-1} é a área da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset T_p M$, $Ric_p(x)$ é a curvatura de Ricci de M^n em p na direção $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $d\sigma$ é o elemento de área de $\mathbb{S}^{n-1}$.

3 Uma variedade Riemanniana M^n é dita ser localmente simétrica se $\nabla R \equiv 0$, onde R denota o tensor curvatura de M^n .

(a) Mostre que toda variedade Riemanniana com curvatura seccional constante é localmente simétrica;

(b) Construa um exemplo de uma variedade Riemanniana localmente simétrica, a qual não possui curvatura seccional constante.

4 Uma curva divergente em uma variedade Riemanniana M^n é uma aplicação $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M^n$ tal que, para todo compacto $K \subset M^n$, existe $t_0 \in (0, +\infty)$ com $\alpha(t) \in K^c$ para $t > t_0$. Definimos o comprimento de uma curva divergente por

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t |\alpha'(s)| ds.$$

Prove que M^n é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.

5 Dada uma imersão isométrica mínima $\psi : M^n \rightarrow \widetilde{M}_c^{n+k}$ numa variedade Riemanniana $\widetilde{M}_c^{n+k}$ de curvatura seccional constante c , mostre que a curvatura de Ricci de M^n , Ric , é tal que $Ric(X) \leq c$ para todo campo unitário $X \in TM$. Ademais, prove que $Ric(X)$ é identicamente igual a c se, e somente se, ψ é totalmente geodésica.

6 Enuncie e demonstre o Teorema de Cartan da determinação da métrica Riemanniana pelo tensor curvatura. Existe alguma relação entre o Teorema de Cartan e o Teorema Egregium de Gauss? Justifique.

Bom Exame !!