



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática



Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística

Programa de Doutorado em Matemática
Exame de Qualificação em Álgebra Comutativa
João Pessoa/Campina Grande, 07 de agosto de 2013

Banca Examinadora:

Prof. Cleto Brasileiro Miranda Neto (UFPB)
Prof. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva (UFCG)

Aluno: _____ Nota: _____

Convenção: Nesta prova, todos os anéis são considerados comutativos e com identidade. Onde aparece, o símbolo k denota um corpo.

Questão 1 *Sejam A um anel e I um ideal de A .*

1. (1,0 pt) *Mostre que, se $\sqrt{I}$ é um ideal maximal, então I é um ideal primário.*
2. (1,0 pt) *Considere $A = k[X, Y]$ e $I = (X^2, XY) \subset A$. Demonstre que $\sqrt{I}$ é um ideal primo, e que I não é um ideal primário.*

Questão 2 *Sejam A um anel, M um A -módulo e I um ideal de A . Se B é um anel e $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de anéis, denotamos por M_B o B -módulo $B \otimes_A M$, obtido de M por extensão de escalares.*

1. (1,0 pt) *Mostre que $M_{A/I}$ é isomorfo a M/IM .*
2. (1,0 pt) *Sejam A um anel local e K o corpo residual de A . Mostre que se M é um A -módulo finitamente gerado então $M_K = 0$ se, e somente se, $M = 0$.*

Questão 3 (1,0 pt) *Sejam B um anel e A um subanel de B , com B inteiro sobre A , e seja S um sistema multiplicativamente fechado em A . Mostre que $S^{-1}B$ é inteiro sobre $S^{-1}A$.*

Questão 4 (2,0 pt) *Sejam A um anel e $I \subset A$ um ideal radical que pode ser escrito como o produto de uma quantidade finita de ideais primos distintos em A . Explique como se obtém uma decomposição primária minimal de I . Considerando especificamente o ideal $I = (XY, XZ, XW) \subset A = k[X, Y, Z, W]$, obtenha uma decomposição primária minimal de I , e descreva os elementos de $\text{Ass}_A(A/I)$, destacando os primos associados minimais e os imersos (caso existam).*

Questão 5 (1,5 pt) *Considere a k -subálgebra $B = k[X^3, X^2Y, XY^2, Y^3, Z^3] \subset A = k[X, Y, Z]$. Encontre explicitamente uma base de transcendência de B (sobre k). Em seguida, determine o fecho inteiro $\bar{B}$ (em A), e calcule a dimensão de Krull de B .*

Questão 6 (1,5 pt) *Enuncie precisamente o Lema de Normalização de Noether e o Teorema do Ideal Principal de Krull.*

Bom Exame!!