Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística

Programa de Doutorado em Matemática

Exame de Qualificação em Variedades

João Pessoa/Campina Grande, 05 de agosto de 2013, de 8 : 00 ao meio dia.

Banca Examinadora:

Prof. João Marcos do Ó (UFPB)

Prof. Marco Antonio Lazaro Velasquez (UFCG)

Aluno: ______________________________ Nota: ____________

Questão 1 *(1.0) Sejam M e N variedades diferenciáveis sendo M conexa. Suponha que $F : M \to N$ é diferenciável e $F'(p) : T_pM \to T_{F(p)}N$ é a aplicação linear nula para todo $p \in M$. Prove que F é constante.*

Questão 2 *(1.0) Mostre que toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

Questão 3 *(1.0) Mostre que o fibrado $T\mathbb{S}^1$ é difeomorfo ao fibrado $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.*

Questão 4 *(1.0) Seja $F : N \to M$ uma imersão de classe $C^k (k \geq 1)$. Mostre que F é localmente um mergulho, isto é, para cada $p \in N$, existe uma vizinhança U de p em N tal que $F|_U : U \to M$ é um mergulho de classe C^k.*

Questão 5 *(1.0) Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n e seja $S \subset M^n$ uma k-subvariedade mergulhada. Com a topologia induzida, mostre que S é uma variedade topológica de dimensão k e possui uma única estrutura diferenciável tal que a inclusão $\iota : S \hookrightarrow M^n$ é um mergulho suave.*

Questão 6 *(2.0) Faça os itens abaixo:*

(a) *Mostre que qualquer produto de variedades orientáveis é orientável.*
(b) *Mostre que o fibrado tangente TM de uma variedade suave M^n é orientável (mesmo que M^n não o seja).*
(c) *Mostre que qualquer conjunto aberto de uma variedade orientável é orientável.*
(d) *Mostre que $\mathbb{RP}^2$ não é oreintável.*

Questão 7 *(1.0) Mostre que a aplicação antípoda $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, A(p) = -p$ é uma isometria de $\mathbb{S}^n$. Use este fato para introduzir uma métrica Riemanniana no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$ tal que a projeção natural $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ seja uma isometria local.*

Questão 8 *(1.0) Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n, sem fronteira, compacta e orientada. Prove que a integral de toda $n-$forma exata sobre M é zero. Construa um contra-exemplo para o caso de M não ser compacta.*

Questão 9 *(1.0) Faça os itens abaixo:*

(a) *Mostre que todo grupo de Lie é orientável.*
(b) *Prove que todo grupo de Lie é paralelizável, isto é, se G é um grupo de Lie então $TG \cong G \times T_eG$.*

Bom Exame !!