

Programa de Doutorado em Matemática - UFPB/UFCG
Exame de Qualificação em Análise Funcional (25/02/2011)

Aluno (a): _____ **Matrícula:** _____

1. (1.0) a) Seja C um subconjunto fechado de um espaço de Banach X e $A : C \rightarrow C$ tal que $\|Ax - Ay\| \leq c\|x - y\|, \forall x, y \in C$, para algum $0 \leq c < 1$. Mostre que A tem um único ponto fixo em C .
b) Sejam X, Y espaços de Banach e $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ uma bijeção. Se $A_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ é tal que $\|A_0^{-1}\|\|A_1\| < 1$, mostre que $A_0 + A_1$ tem uma inversa.
2. (1.5) Seja $(E, \|\cdot\|_1)$ um espaço normado de dimensão infinita. Mostre que existe um funcional não limitado e use isto para mostrar que existe uma norma $\|\cdot\|_2$ que não é equivalente a norma $\|\cdot\|_1$.
3. (1.5) Seja E um espaço de Banach reflexivo de dimensão infinita. Mostre que existe sequência em E que converge fracamente e não converge fortemente. Use isto para concluir que l^1 e l^∞ não são reflexivos.
4. (1.5) Considere o espaço de Banach $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ e seja $\|\cdot\|$ outra norma em l^∞ tal que $(l^\infty, \|\cdot\|)$ é completo. Suponha que para cada $j \geq 1$, a aplicação $\varphi_j : l^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_j(x) = x_j$ é contínua na norma $\|\cdot\|$. Mostre que existe $C > 0$ tal que

$$\|x\| \leq C\|x\|_\infty, \quad \forall x \in l^\infty.$$

5. (1.5) Sejam E um espaço de Banach uniformemente convexo e $f \in E'$. Defina $\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - f(u)$. Mostre que existe $u_0 \in E$ tal que

$$\varphi(u) \geq \varphi(u_0), \quad \forall u \in E.$$

6. (1.5) Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ um operador linear contínuo invertível. Mostre que se $f \in H'$, então existe $y \in H$ tal que

$$f(x) = (T^*Tx, y), \quad \forall x \in H,$$

onde T^* é o operador adjunto de T .

7. (1.5) Dado $(\lambda_k) \in l^\infty$ defina $T : l^2 \rightarrow l^2$ por $T(x) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$.
 - a) Encontre os autovalores e o espectro de T (Use que $\sigma(T)$ é fechado e assim $\overline{\{\lambda_k\}} \subset \sigma(T)$ agora se $\lambda \notin \overline{\{\lambda_k\}}$ então $\inf |\lambda - \lambda_k| > 0$);
 - b) Use a) para mostrar que dado qualquer subconjunto compacto $A \subset \mathbb{R}$ então existe um operador $T \in \mathcal{L}(l^2)$ tal que $\sigma(T) = A$.