

**Programa de Doutorado em Matemática - UFPB/UFCG**  
**Exame de Qualificação em Álgebra Comutativa - 2011**

**Aluno(a):** \_\_\_\_\_ **Matrícula:** \_\_\_\_\_

Em toda esta prova, todos os anéis são comutativos com unidade (com  $1 \neq 0$ ).

1. (1,5 pontos) Seja  $A$  um anel semilocal de dimensão 0. Mostre que todo elemento não inversível de  $A$  é um divisor de zero. (Dica: sejam  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$  os ideais maximais de  $A$  e  $x \in \mathfrak{m}_i$ . Existe  $t \in (\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{m}_j) - \mathfrak{m}_i$  e  $tx \in N(A)$  (por que?).)
2. (1,5 pontos) Enuncie precisamente o *Lema de Nakayama*. Sendo  $A$  um anel, mostre que:
  - a) Se  $R$  é um subanel de  $A$  e  $A$  é finitamente gerado como  $R$ -módulo, então  $U(A) \cap J(R) = \emptyset$ .
  - b) Se  $A$  é noetheriano e  $I$  e  $J$  são ideais de  $A$  tais que  $J \subseteq J(A)$  e  $JI = I$ , mostre que  $I = \{0\}$ .
3. (1,0 ponto) Sejam  $A$  um anel,  $S$  um subconjunto multiplicativamente fechado de  $A$  (com  $1 \in S$ ) e  $M$  um  $A$ -módulo. Mostre que  $S^{-1}A \otimes M \simeq S^{-1}M$  (como  $A$ -módulos).
4. (1,0 ponto) Sejam  $R$  um anel noetheriano e  $I$  um ideal próprio de  $R$ . Mostre que se  $R/I$  é artiniano, então  $I$  possui uma única decomposição primária minimal.
5. (1,5 pontos) Seja  $A$  um anel noetheriano. Mostre que  $A$  é artiniano se, e somente se,  $\text{Spec}(A)$  é um espaço topológico discreto.
6. (1,5 pontos) Defina precisamente *dimensão de Krull* de um anel. Sejam  $B$  um anel e  $A$  um subanel de  $B$ . Mostre que se  $B$  é inteiro sobre  $A$ , então  $\dim(A) = \dim(B)$ .
7. (2,0 pontos) Enuncie precisamente o *Teorema do Ideal Principal de Krull* e o *Lema de Normalização de Noether*. Sendo  $A = K[X_1, \dots, X_n]$  um anel de polinômios a  $n$  variáveis sobre o corpo  $K$  e  $I$  um ideal principal (não nulo) de  $A$ , mostre que  $\dim(A/I) = n - 1$  (dimensão de Krull).

LEMBRETE:  $J(A)$  = radical de Jacobson de  $A$  ,  $N(A)$  = nilradical de  $A$   
 $U(A)$  = conjunto dos elementos inversíveis de  $A$ .

BOA SORTE!