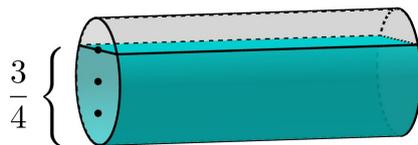




## Prova - Nível 3

- (20 pontos) A soma de dois números é igual a 5 e a soma de seus cubos é 25. Determine a soma dos quadrados destes números.
- (20 pontos) Um caminhão que transporta combustível tem seu reservatório no formato de um cilindro circular reto com eixo horizontal. Este reservatório está cheio até  $\frac{3}{4}$  de sua altura, conforme a figura abaixo. Determine o quociente entre o volume ocupado e o volume total deste reservatório.



- (20 pontos) O Jogo da Memória é uma atividade recreativa que desenvolve a capacidade de concentração e a memória. O objetivo do jogo é encontrar pares de cartas idênticas. Para cada carta no jogo, existe uma única carta idêntica a ela que formará o par (não há pares repetidos). Misturam-se todas as cartas de forma aleatória, que são colocadas viradas para baixo numa superfície, e dispostas em formato de um tabuleiro retangular. Decide-se uma ordem específica dos jogadores antes do início do jogo. Em cada jogada, o participante da vez escolhe duas cartas para desvirar, **uma de cada vez**. **Se as cartas forem idênticas, o jogador forma um par, retira as duas cartas do tabuleiro** e repete a jogada. Se as cartas forem diferentes, o jogador deve recolocá-las viradas para baixo exatamente no mesmo lugar. O jogo termina quando todos os pares tiverem sido encontrados. O vencedor é o jogador com mais pares acumulados ao final.

Com base nestas informações, considere um Jogo da Memória composto de 12 pares de cartas (24 cartas no total). Se  $P$  é a probabilidade de um jogador, que inicia a partida, acertar todos os 12 pares de uma única vez, com 12 jogadas seguidas, calcule  $P \times \frac{23!}{11!}$ .

- (20 pontos) Um comerciante mantém **40** unidades de um determinado produto estocadas no depósito  $D_1$  e outras **15** unidades do mesmo produto no depósito  $D_2$ . Serão enviadas **20** unidades desse produto para um cliente  $A$  e **30** unidades para um cliente  $B$ .

Representaremos por  $x$  a quantidade do produto no depósito  $D_1$  que será enviada ao cliente  $A$ , e por  $y$  a quantidade do produto no depósito  $D_1$  que será enviada ao cliente  $B$ . Os gastos com transporte, por unidade do produto, em reais (R\$), estão indicados no seguinte quadro:

Depósitos	Cliente A	Cliente B
$D_1$	15,00	13,00
$D_2$	14,00	16,00

- Representando por  $C$  o custo do transporte do produto para os clientes  $A$  e  $B$ , determine, em função das quantidades  $x$  e  $y$ , uma expressão que forneça o custo  $C$ ;
  - Pelas informações contidas no enunciado acima,  $x$  e  $y$  devem satisfazer restrições da forma
 
$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad x + y \leq n \quad \text{e} \quad x + y \geq m,$$
 em que  $a, b, c, d, n$  e  $m$  são quantidades não-negativas. Determine os números  $a, b, c, d, n$  e  $m$ ;
  - Esboce no plano de coordenadas  $xOy$  a região descrita pelas inequações obtidas no item b);
  - É possível para o comerciante atender às solicitações dos clientes com um custo  $C$  de R\$ 675,00? Justifique.
- (20 pontos) Para cada número inteiro positivo  $n$ , define-se como  $E(n)$  o **maior número inteiro não-negativo** tal que  $2^{E(n)}$  divide  $n$ . Por exemplo,  $E(40) = 3$ , enquanto que  $E(41) = 0$ . Com base nesta definição, calcule

$$E(1) + E(2) + \dots + E(2024).$$