



## Prova - Nível 3

1. (20 pontos) Observe a disposição da seguinte sequência:

$$\begin{array}{rcccc} 1^{\text{a}} \text{ linha} & 2 & & & \\ 2^{\text{a}} \text{ linha} & 6 & 18 & & \\ 3^{\text{a}} \text{ linha} & 54 & 162 & 486 & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Determine o quinto termo (da esquerda para a direita) da vigésima linha.

2. (20 pontos) Seja  $ABCD$  um quadrado com lados de comprimento 8 cm e considere  $\Gamma$  a circunferência inscrita neste quadrado. Denote por  $O$  o centro de  $\Gamma$ . Seja  $E$  um ponto sobre o lado  $AB$  de modo que o segmento de reta que liga  $A$  a  $E$  tenha comprimento igual a 1 cm. Seja, então,  $F$  a interseção do segmento de reta  $EO$  com a circunferência  $\Gamma$  e considere o ponto  $G$  como sendo a interseção da reta determinada por  $A$  e  $F$  com o lado  $BC$ .
- Calcule os comprimentos dos segmentos  $EO$  e  $EF$ ;
  - Calcule o comprimento do segmento  $BG$ .

*Dica:* Para o item b), você pode usar que

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}}, \quad \text{para todo } 0 < \alpha < \pi/2.$$

3. (20 pontos) Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  números reais não-nulos tais que  $x + y + z \neq 0$  e satisfazendo a igualdade

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}.$$

- Mostre que  $(x + y)(x + z)(y + z) = 0$ ;
- Conclua que

$$\frac{1}{x^{2023}} + \frac{1}{y^{2023}} + \frac{1}{z^{2023}} = \frac{1}{x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}}.$$

4. (20 pontos) Ana possui três blusas, uma preta, uma branca e uma vermelha. Todo dia de manhã ela escolhe uma dessas ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca escolher a mesma blusa que usou no dia anterior. Supondo que no dia 1 de agosto Ana usou a blusa branca, determine:
- A probabilidade de que no dia 5 de agosto, do mesmo ano, ela volte a usar a blusa branca;
  - A probabilidade de que no dia 31 de agosto, do mesmo ano, ela volte a usar a blusa branca.

5. (20 pontos) Seja  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função satisfazendo as seguintes condições:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{3}{2} \right|, \quad \text{para } 1 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad f(2x) = 2f(x), \quad \text{para todo } x \geq 1.$$

- Encontre o valor de  $f(2023)$ ;
- Determine o menor valor de  $x$  tal que  $f(x) = f(2023)$ .

*Boa prova!*