- A prova começa às 8:00h e termina às 12:30h.
- Sugerimos que a prova seja resolvida até as 12:00h e a equipe use o tempo restante para escanear e enviar a prova.
- Preencha o nome da equipe e dos alunos em todas as folhas de resposta.
- A equipe não pode ter ajuda de professores, pais ou responsáveis para resolver as questões.
- A equipe pode ter ajuda de professores, pais ou responsáveis somente para escanear e enviar a prova.

Prova - Nível 3

1. (20 pontos) Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpre $f(2) = 1$ e satisfaz as seguintes propriedades, para todo natural $n \geq 1$:

   i) $f(3n) = 3f(n)$;
   ii) $f(3n+1) = 3f(n) + 1$;
   iii) $f(3n+2) = 3f(n)$.

   Determine $f(2021)$.

2. (20 pontos) Dois círculos C_1 e C_2 se intersectam em dois pontos distintos M e N. Seja AB uma reta que é tangente a C_1 no ponto A e tangente a C_2 no ponto B, de modo que o ponto M fique mais perto de AB do que do ponto N.

   Seja CD a reta paralela a AB e passando pelo ponto M, com C em C_1 e D em C_2.

   As retas AC e BD se encontram no ponto E; as retas AN e CD se encontram em P; as retas BN e CD se encontram em Q. Mostre que o comprimento $\overline{EP}$ é igual ao comprimento $\overline{EQ}$.

   Observação: Entenda-se por reta AB como sendo a única reta que passa pelos pontos A e B.

3. (20 pontos) Considere o polinômio

   $$Q(x) = x^{10} + b_9x^9 + b_8x^8 + \cdots + b_1x + 1,$$

   no qual todos os coeficientes $b_1, b_2, \ldots, b_9$ são números reais maiores ou iguais a zero (ou seja $b_j \geq 0$, para $j = 1, \ldots, 9$).

   Sabendo que todas as raízes do polinômio $Q(x)$ são números reais, mostre que

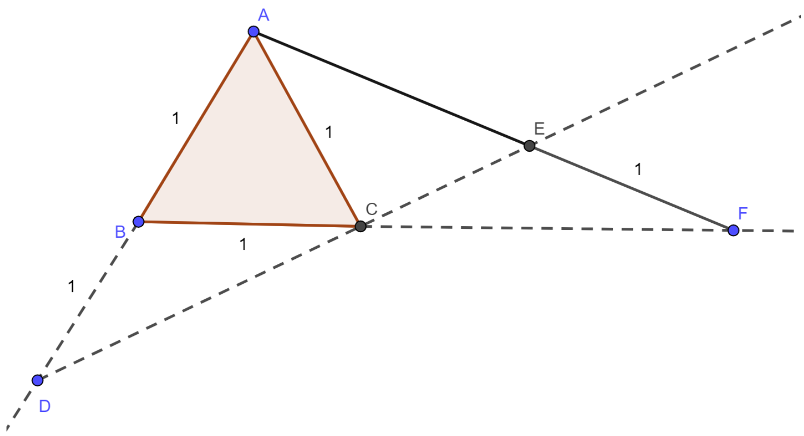
   $$Q(2) \geq 3^{10}.$$

   Sugestão: Você pode usar que a média aritmética de três números positivos é sempre maior ou igual a média geometrica desses três números.

4. (20 pontos) Considere ABC um triângulo equilátero de lado medindo 1 e D ($D \neq A$) um ponto pertencente à reta AB de modo que o comprimento $\overline{BD} = 1$. Além disso, considere os pontos E e F satisfazendo as seguintes condições, de acordo com a figura abaixo:

- Os pontos A, E e F estão alinhados;
- O ponto E está entre A e F e sobre a reta DC
- O ponto F está sobre a reta BC e temos o comprimento $\overline{EF} = 1$.

Determine o comprimento do segmento $\overline{AE}$.



5. (20 pontos) Considere o conjunto de números naturais $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.
Para cada subconjunto $X \subset A$, denote por $p(X)$ o produto dos elementos de X. Por exemplo, se $X = \{1, 3, 5\}$ então
$$p(\{1, 3, 5\}) = 1 \times 3 \times 5 = 15.$$
Por convenção, adote:
   - $p(\emptyset) = 1$, onde $\emptyset$ representa o conjunto vazio;
   - $p(\{n\}) = n$, para cada $n = 1, \ldots, 100$.

   Determine o número $s(A)$ que representa a soma de todos os $p(X)$, com X subconjunto de A. Isto é, calcule a soma
$$s(A) = \sum_{X \subseteq A} p(x).$$
Dica: Cada subconjunto X de A que não contém um elemento $n \in A$ corresponde a um único subconjunto da forma $X \cup \{n\}$, e $p(X \cup \{n\}) = n \cdot p(X)$

Boa prova!