# Soluções - Nível 3

1. (20 pontos) Observe a disposição da seguinte sequência:

$$\begin{array}{llll} 1^a \text{ linha} & 2 & & \\ 2^a \text{ linha} & 6 & 18 & \\ 3^a \text{ linha} & 54 & 162 & 486 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Determine o quinto termo (da esquerda para a direita) da vigésima linha.

**Solução**

Primeiramente, note que a sequência acima trata-se de uma PG de razão 3 e cujo primeiro termo é 2. Devemos então saber qual é a posição, nesta sequência, que o quinto termo da vigésima linha ocupa. A quantidade de termos até a linha 19 é dada por

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = \frac{(1 + 19).19}{2} = 190.$$

Contando mais cinco termos da vigésima linha, concluímos que o quinto termo (da esquerda para a direita) da vigésima linha é o termo $a_{195}$ da referida PG e, portanto, é dado por

$$a_{195} = 2.3^{195-1} = 2.3^{194}$$

2. (20 pontos) Seja $ABCD$ um quadrado com lados de comprimento 8 cm e considere $\Gamma$ a circunferência inscrita neste quadrado. Denote por $O$ o centro de $\Gamma$. Seja $E$ um ponto sobre o lado $AB$ de modo que o segmento de reta que liga $A$ a $E$ tenha comprimento igual a 1 cm. Seja, então, $F$ a interseção do segmento de reta $EO$ com a circunferência $\Gamma$ e considere o ponto $G$ como sendo a interseção da reta determinada por $A$ e $F$ com o lado $BC$.

a) Calcule os comprimentos dos segmentos $EO$ e $EF$;

b) Calcule o comprimento do segmento $BG$.

*Dica:* Para o item b), você pode usar que

$$\text{tg}(\alpha) = \sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}}, \quad \text{para todo } \; 0 < \alpha < \pi/2.$$

**Solução**

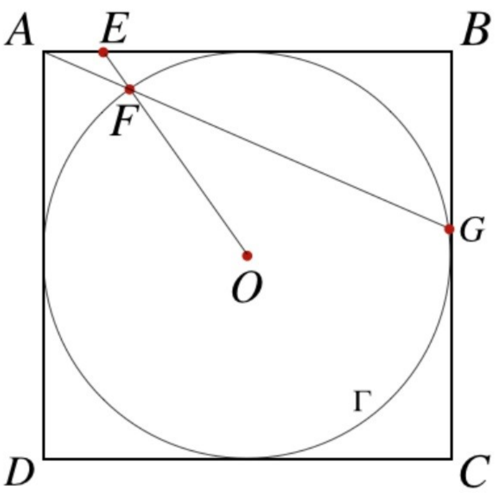



Figura 1

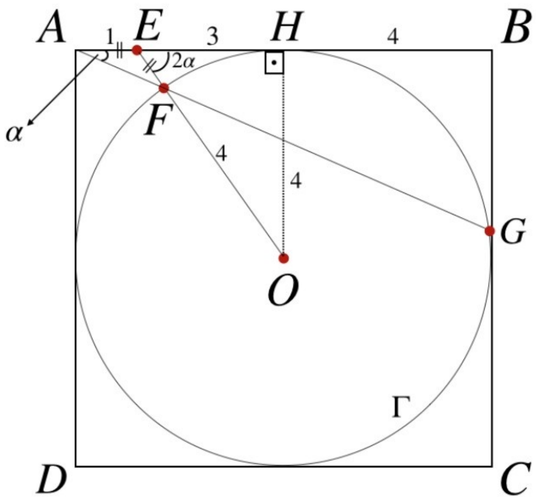



Figura 2

a) A Figura 1 acima retrata a configuração geométrica descrita no enunciado. Consideremos $H$ o ponto de interseção da circunferência $\Gamma$ com o lado AB, como na Figura 2. O ângulo $\angle OHA$ é reto e, além disso, $\overline{OH} = 4$ cm pois corresponde ao raio de $\Gamma$ que é igual a metade do lado do quadrado $ABCD$. Desde que $\overline{AE} = 1$ cm temos $\overline{EH} = 3$ cm. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $OHE$ obtemos

$$\overline{EO}^2 = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{EH}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \; cm.$$

Consequentemente, $\overline{EF} = \overline{EO} - \overline{FO} = 5 \; cm - 4 \; cm = 1 \; cm$.

b) Pelo item a), $\overline{AE} = \overline{EF} = 1 \; cm$ e, portanto, o triângulo $AEF$ é isósceles. Denotando a medida do ângulo $\angle EAF$ por $\alpha$, segue que a medida do ângulo $\angle EFA$ também é $\alpha$. Portanto, a medida do ângulo externo $\angle OEH$ é $2\alpha$. Daí, usando o triângulo retângulo $OEH$ obtemos $\cos(2\alpha) = 3/5$. Pela dica dada na questão e usando o triângulo retângulo $ABG$, concluímos que

$$\frac{\overline{BG}}{8} = \text{tg}(\alpha) = \sqrt{\frac{1-3/5}{1+3/5}} = \frac{1}{2} \implies \overline{BG} = 8.\frac{1}{2} \implies \overline{BG} = 4 \; cm.$$

3. (20 pontos) Sejam $x$, $y$ e $z$ números reais não-nulos tais que $x+y+z \neq 0$ e satisfazendo a igualdade

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}.$$

a) Mostre que $(x+y)(x+z)(y+z)=0$;

b) Conclua que

$$\frac{1}{x^{2023}}+\frac{1}{y^{2023}}+\frac{1}{z^{2023}}=\frac{1}{x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}}. \tag{1}$$

**Solução**

a) Efetuando cálculos simples, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z} \iff \\
&(yz+xz+xy)(x+y+z)=xyz \iff \\
&yzx+yz(y+z)+(xz+xy)(x+y)+(xz+xy)z=xyz \iff \\
&yz(y+z)+x(y+z)(x+y)+xz(y+z)=0 \iff \\
&x(y+z)(x+y)+z(y+z)(x+y)=0 \iff \\
&(x+y)(x+z)(y+z)=0.
\end{aligned}$$

b) Pelo item a), devemos ter $x+y=0$ ou $x+z=0$ ou $y+z=0$. Se $x+y=0$ então $x=-y$. Portanto,

$$\frac{1}{x^{2023}}+\frac{1}{y^{2023}}+\frac{1}{z^{2023}}=-\frac{1}{y^{2023}}+\frac{1}{y^{2023}}+\frac{1}{z^{2023}}=\frac{1}{z^{2023}}$$

e

$$\frac{1}{x^{2023}+y^{2023}+z^{2023}}=\frac{1}{-y^{2023}+y^{2023}+z^{2023}}=\frac{1}{z^{2023}},$$

de onde segue a igualdade desejada. Pela simetria em $x, y, z$ na igualdade (1), os outros dois casos são análogos.

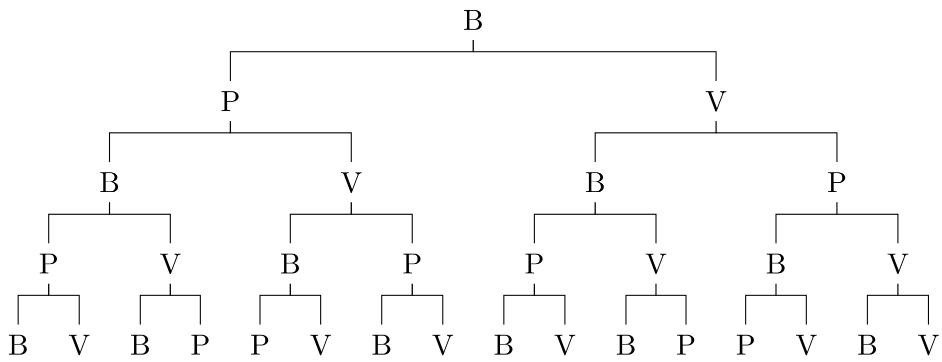
4. (20 pontos) Ana possui três blusas, uma preta, uma branca e uma vermelha. Todo dia de manhã ela escolhe uma dessas ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca escolher a mesma blusa que usou no dia anterior. Supondo que no dia 1 de agosto Ana usou a blusa branca, determine:

   a) A probabilidade de que no dia 5 de agosto, do mesmo ano, ela volte a usar a blusa branca;

   b) A probabilidade de que no dia 31 de agosto, do mesmo ano, ela volte a usar a blusa branca.

**Solução**

a) No dia 1 de agosto, a escolha é única pela blusa branca. No dia 2 de agosto, há duas possibilidades: preta ou vermelha. No dia 3, há duas possibilidades para blusa branca, uma para preta, e uma para vermelha. Abaixo temos um diagrama das escolhas possíveis até o dia 5 de agosto (cada nível representa o respectivo dia de agosto e seus possíveis casos, denotando-se B: branca, V: vermelha e P: preta).




Portanto, a probabilidade de escolha da blusa branca no quinto dia ($p_{b,5}$) será

$$p_{b,5} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

b) O total de escolhas possíveis $n_k$, no dia $k$ de agosto ($k \in \{1, 2, \ldots, 30, 31\}$), cumpre a relação $n_k = 2^{k-1}$.

Sejam $n_{b,k}, n_{p,k}, n_{v,k}$ o total de escolhas possíveis, no dia $k$ de agosto, para as blusas branca, preta e vermelha, respectivamente. De acordo com o diagrama, perceba que o total de escolhas da cor branca é a soma de casos das cores preta e vermelha do dia anterior. Com isso, obtemos

$$n_k = n_{b,k} + n_{p,k} + n_{v,k} = 2^{k-1} \quad \text{e} \quad n_{b,k+1} = n_{p,k} + n_{v,k}.$$

Logo, $n_{b,k+1} = 2^{k-1} - n_{b,k}$, ou seja,

$$n_{b,k+1} + n_{b,k} = 2^{k-1}. \tag{2}$$

Escrevendo a Eq. (2) para $k = 1, \ldots, 30$ e multiplicando, alternadamente, as equações por 1 e -1 e, em seguida, somando todas, concluiremos que

$$n_{b,31} - n_{b,1} = 2^{29} - 2^{28} + \ldots + 2^3 - 2^2 + 2 - 1 \quad \Rightarrow \quad n_{b,31} = 2^{29} - 2^{28} + \ldots + 2^3 - 2^2 + 2 = \frac{2}{3}(1 + 2^{29})$$

Portanto, a probabilidade de escolha da blusa branca no dia 31 de agosto, denotada por $p_{b,31}$, será

$$p_{b,31} = \frac{n_{b,31}}{n_{31}} = \frac{\frac{2}{3}(1 + 2^{29})}{2^{30}} = \frac{1 + 2^{-29}}{3}.$$

5. (20 pontos) Seja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes condições:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{3}{2}\right|, \quad \text{para} \;\; 1 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad f(2x) = 2f(x), \quad \text{para todo} \;\; x \geq 1.$$

a) Encontre o valor de $f(2023)$;

b) Determine o menor valor de $x$ tal que $f(x) = f(2023)$.

**Solução**

a) Primeiramente, observemos que pela condição imposta sobre $f$, obtemos

$$f(2^2x) = 2f(2x) = 2^2f(x) \implies f(2^3x) = 2f(2^2x) = 2.2^2f(x) = 2^3f(x)$$

e indutivamente podemos concluir que

$$f(2^kx) = 2^kf(x), \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e para todo } x \geq 1. \tag{3}$$

Agora, a ideia é dividir 2023 por uma potência de 2 de modo a obtermos um número no intervalo $[1, 2]$, e usar a propriedade (3) e a expressão de $f(x)$. Note que $2023/2^{10} = 2023/1024 \in [1, 2]$ de onde segue

$$f(2023) = f\left(2^{10}.\frac{2023}{2^{10}}\right) = 2^{10}f\left(\frac{2023}{2^{10}}\right) = 2^{10}\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{2023}{2^{10}} - \frac{3}{2}\right|\right) = 2^9 - |2023 - 2^9.3| = 25.$$

b) Pelo item a), queremos obter o menor valor de $x$ tal que $f(x) = 25$, a qual é equivalente, pela propriedade (3), a obter o menor valor de $x$ tal que

$$f(x/2^k) = 25/2^k \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Observe, pela definição de $f$ no intervalo $[1, 2]$ que $0 \leq f(x) \leq 1/2$ para todo $1 \leq x \leq 2$ e $f$ é sobrejetiva em [1,2]. Como desejamos obter o menor valor de $x$ de modo que (4) seja satisfeita e estabelecendo $y = x/2^k$, ou seja, $x = 2^ky$, a ideia é encontrar o menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $25/2^k \in [0, 1/2]$, o qual deve ser $k = 6$. Assim,

$$f\left(\frac{x}{2^6}\right) = \frac{25}{2^6} \iff \frac{1}{2} - \left|\frac{x}{2^6} - \frac{3}{2}\right| = \frac{25}{2^6} \iff \left|\frac{x}{64} - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2} - \frac{25}{64} \iff x \in \{89, 103\}$$

e, como $x$ deve ser mínimo, devemos ter $x = 89$.