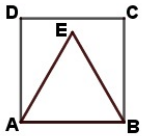
Solução - Prova Nível 2

1. (20 pontos) O diretor da escola São João é professor de matemática e construiu uma praça na forma de um quadrado $ABCD$, conforme figura abaixo.



Ele deseja que fique destacado na praça um triângulo equilátero e para isso determina um ponto E no interior do quadrado $ABCD$, de modo a formar um triângulo equilátero AEB. Nestas condições, calcule:

a) A medida dos ângulos $\measuredangle A\widehat{D}E$ e $\measuredangle A\widehat{E}D$;

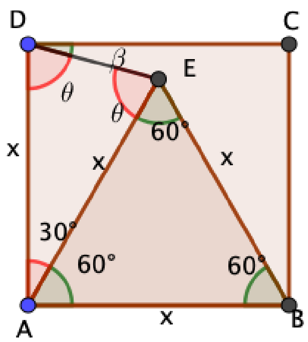
b) A medida do ângulo $\measuredangle D\widehat{E}C$.

Solução (a):

Observe na Figura abaixo que o triângulo $A\widehat{E}B$ é equilátero. Assim, $\measuredangle E\widehat{A}B = \measuredangle A\widehat{B}E = \measuredangle B\widehat{E}A = 60^o$. Logo, $\measuredangle E\widehat{A}D = 30^o$. Como o triângulo $A\widehat{E}D$ é isósceles de base DE, resulta que $\measuredangle A\widehat{D}E = \measuredangle A\widehat{E}D = \theta$. Portanto, $2\theta + 30^o = 180^o$ o que implica que $\theta = 75^o$.

Solução (b) :

Como $C\widehat{E}B = E\widehat{C}B = 75^o$, resulta que $E\widehat{C}D = E\widehat{D}C = 15^o$, e portanto $\measuredangle D\widehat{E}C = 150^o$.



2. (20 pontos) Aldo investiu seu dinheiro na compra de salas comerciais em um edifício empresarial. Sabendo que todas as salas custam o mesmo valor, Aldo percebeu que se tivesse investido mais $R\$ \ 80.000,00$ ele conseguiria comprar um total de 9 salas. Aldo percebeu também que se cada sala custasse $R\$ \ 10.000,00$ a menos, ele conseguiria comprar um total de 8 salas e ainda sobrariam $R\$ \ 60.000,00$. Quanto Aldo investiu?

Solução:

Considere $X =$ *Valor investido por Aldo* e $Y =$ *Valor de cada sala*. Assim,

$$\begin{cases} X + 80.000 = 9Y, \\ 8(Y - 10.000) = X - 60.000, \end{cases}$$

donde concluímos que

$$\begin{cases} 9Y - X = 80.000, \\ -8Y + X = -20.000. \end{cases}$$

Somando as equações acima, obtemos $Y = 60.000$ e, consequentemente, $X = 460.000$. Portanto, o valor investido por Aldo foi de R\$ $460.000,00$.

3. (20 pontos) Resolva os seguintes itens:

a) Encontre todos os números positivos a e b tais que $\dfrac{ab}{a+b} = 2$. Justifique sua resposta.

b) Seja $p > 2$ um número primo. Encontre todos os números positivos a e b tais que $\frac{ab}{a+b} = p$.

Solução (a): Primeiro, note que que $ab = 2a + 2b \implies a(b-2) = 2b > 0 \implies b > 2$.

Do mesmo modo, $ab = 2a + 2b \implies b(a-2) = 2a > 0 \implies a > 2$.

Por outro lado, $ab = 2a + 2b \implies \frac{ab}{2} = a + b$. Logo, 2 divide a ou 2 divide b.

Se 2 divide b, então $\frac{b}{2} = 1 + \frac{b}{a}$ então a divide b. Assim, $b = a \cdot k$.

Deste modo,

$$\frac{k \cdot a^2}{a(k+1)} = 2 \implies \frac{k \cdot a}{k+1} = 2 \implies k \cdot a = 2k + 2 \implies a = 2 + \frac{2}{k}.$$

Ou seja, k divide 2, isto é $k = 1$ ou $k = 2$.

Se $k = 1$ então $a = b$ e então $\frac{a^2}{2a} = 2 \implies a = b = 4$.

Se $k = 2$ então $b = 2a$ e então $\frac{2a^2}{3a} = 2 \implies a = 3$, donde $b = 6$.

É fácil ver que o caso 2 divide a é simétrico e que $a = 6, b = 3$ é outra solução.

Assim, temos as seguintes soluções possíveis:

$$(4,4), (3,6), (6,3).$$

• Obs.: Por um erro de digitação, a questão não explicita que as soluções são inteiros. Portanto, considerou-se também as infinitas soluções da forma

$$a = \frac{2b}{b-2}.$$

Solução (b): Seja $p > 2$ um número primo. Encontre todos os números positivos a e b tais que $\frac{ab}{a+b} = p$.

Primeiro, note que que $ab = pa + pb \implies a(b-p) = pb > 0 \implies b > p$.

Do mesmo modo, $ab = pa + pb \implies b(a-p) = pa > 0 \implies a > p$.

Por outro lado, $ab = pa + pb \implies \frac{ab}{p} = a + b$. Logo, p divide a ou p divide b.

Se p divide b, então $\frac{b}{p} = 1 + \frac{b}{a}$ então a divide b. Assim, $b = a \cdot k$.

Deste modo,

$$\frac{k \cdot a^2}{a(k+1)} = p \implies \frac{k \cdot a}{k+1} = p \implies k \cdot a = pk + p \implies a = p + \frac{p}{k}.$$

Ou seja, k divide p, isto é $k = 1$ ou $k = p$.

Se $k = 1$ então $a = b$ e então $\frac{a^2}{2a} = p \implies a = 2p = b$.

Se $k = 2$ então $b = 2a$ e então $\frac{2a^2}{3a} = p \implies 2a = 3p$, donde $a = \frac{3p}{2}$. Como $p > 2$, não há solução possível neste caso.

• Obs.: Por um erro de digitação, a questão não explicita que as soluções são inteiros. Portanto, na correção considerou-se também caso as infinitas soluções da forma

$$a = \frac{pb}{b-p}.$$

4. (20 pontos) Felipe, Bruno e Miriam participaram de uma corrida de 10km. Ao fim da corrida, foram observados os seguintes fatos:

   - Bruno terminou a corrida na posição 14.
   - Miriam terminou a corrida na posição 24.
   - O número de competidores que terminaram a corrida antes de Felipe foi igual ao número de competidores que terminaram a corrida depois de Felipe.
   - Felipe terminou a corrida na frente de Bruno.

   Quantos corredores correram a prova? Justifique sua resposta.

   Solução:

   Seja n o número de corredores e x o número de corredores que terminaram na frente de Felipe. Então, $n = 2x+1$ é um número ímpar. Como Mirian terminou na posição 24, devemos ter $n \geq 25$, donde $x \geq 12$.

   Se fosse $x \geq 13$, então Felipe deveria ter terminado pelo menos na posição 14, o que é impossível, pois Felipe terminou na frente de Bruno.

   Portanto, $x = 12$ e tivemos $n = 25$ corredores na prova.

5. (20 pontos) Pedro e Antônio visitaram João Pessoa para um evento de matemática e em um determinado dia foram à praia. Chegando lá eles compraram dois ingressos para um evento esportivo. Pedro, de forma curiosa, comenta com Antônio as seguintes observações feitas sobre a numeração dos ingressos:

- O número de cada ingresso é formado por três dígitos;
- O número do ingresso de Pedro e o número do ingresso de Antônio são dois números consecutivos;
- Somando os dígitos do ingresso de Pedro com os dígitos do ingresso de Antônio obtemos 28.

Baseado nas informações apresentadas, responda:

a) É possível que o algarismo das unidades do menor número seja diferente de 9? Justifique.

b) Determine a numeração de cada ingresso sabendo que o maior dos números possui dois algarismos iguais.

Solução (a):

Seja abc o menor dos números. Se $c \neq 9$, os números seriam dados por abc e $ab(c+1)$ e a soma dos dígitos seria dada por:

$$2 \times (a+b+c)+1,$$

o que não é possível, pois, pelo item 2 essa soma é par.

Solução (b):

Observe também que $b \neq 9$, pois, caso contrário, os números seriam:

$$a99 \text{ e } (a+1)00$$

e portanto a soma dos seus algarismos seria:

$$2a+18+1$$

o que não pode ocorrer, uma vez que a soma é par.

Daí, os números serão:

$$\begin{cases} ab9, & \text{com} \quad b \neq 9 \\ \text{e} & \\ a(b+1)0 & \end{cases}$$

Como o maior número possui 2 algarismos iguais, $a \neq 0$ e $b \neq 9$ então,

$$a = b+1 \text{ e os números são } (b+1)b9 \text{ e } (b+1)(b+1)0$$

e, sendo a soma dos algarismos igual a 28, obtemos:

$$3 \times (b+1)+b+9 = 28 \Rightarrow 4b = 16 \ \Rightarrow \ b = 4.$$

Logo, os números dos bilhetes são 549 e 550.