Soluções - Nível 1

1. (20 pontos) Raul e Simone são irmãos que adoram Matemática e estão aprendendo a utilizar o algoritmo da multiplicação.

   a) Primeiro, Raul fez a seguinte multiplicação, de modo que nenhum número começa por 0, cada letra representa um dígito e letras diferentes representam dígitos diferentes. Qual foi a multiplicação feita por Raul?

$$\begin{array}{cccc} R & A & U & L \\ \times & & & 9 \\ \hline L & U & A & R \end{array}$$

   b) Em seguida, Simone fez a multiplicação a seguir, com as mesmas condições aplicadas à operação matemática feita por Raul. Se nenhum algarismo do número de Simone é igual a zero, qual foi a multiplicação feita por Simone?

$$\begin{array}{cccccc} \text{S} & \text{I} & \text{M} & \text{O} & \text{N} & \text{E} \\ \times & & & & & 5 \\ \hline \text{E} & \text{S} & \text{I} & \text{M} & \text{O} & \text{N} \end{array}$$

Solução (a):

Como o resultado da multiplicação possui apenas 4 dígitos, então é necessário que $\boxed{R = 1}$ e, portanto, que $\boxed{L = 9}$. Ainda é possível perceber que $\boxed{A = 0}$, pois se $A \geq 2$ teríamos que o número $RAUL$ é, pelo menos, 1200, e $1200 \times 9 = 10800$, adicionando um quinto dígito indesejado. Para descobrir o U, temos o seguinte:

- Como $L = 9$, então $9 \times 9 = 81$, com as 8 dezenas indo para o passo seguinte;
- $U \times 9 + 8$ resulta em um número terminado em 0. Sendo assim, $U \times 9$ termina em 2 e, assim, concluímos que $\boxed{U = 8}$.

Assim foi a multiplicação feita por Raul:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 8 & 9 \\ \times & & & 9 \\ \hline \end{array}$$

Solução (b):

Como o resultado da multiplicação possui apenas cinco dígitos, é necessário que $\boxed{S = 1}$. As possibilidades para E são 5, 6, 7, 8 ou 9. É possível, por tentativa e erro, concluir que $\boxed{E = 7}$. Efetuando o algoritmo após ter o valor do E, é possível ver que a multiplicação feita por Simone foi a seguinte:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 \\ \times & & & & & 5 \\ \hline 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 \end{array}$$

2. (20 pontos) Lis está brincando com uma calculadora quebrada e dispõe apenas das teclas visíveis como representado na figura a seguir.

a) Qual sequência de 6 teclas, incluindo a tecla =, Lis pode pressionar para obter o número 227 no visor?

b) Podendo agora apertar quantas teclas quiser, como Lis poder obter o número 0,6 no visor?

c) Podendo mais uma vez apertar quantas teclas quiser, como Lis poder obter o número 227,6?

Solução (a):

2	2	5	$+$	2	$=$	

Solução (b)

5	-	2	$=$	$\div$	5	$=$		

Solução (c): Escrevendo o número em forma de fração, temos:

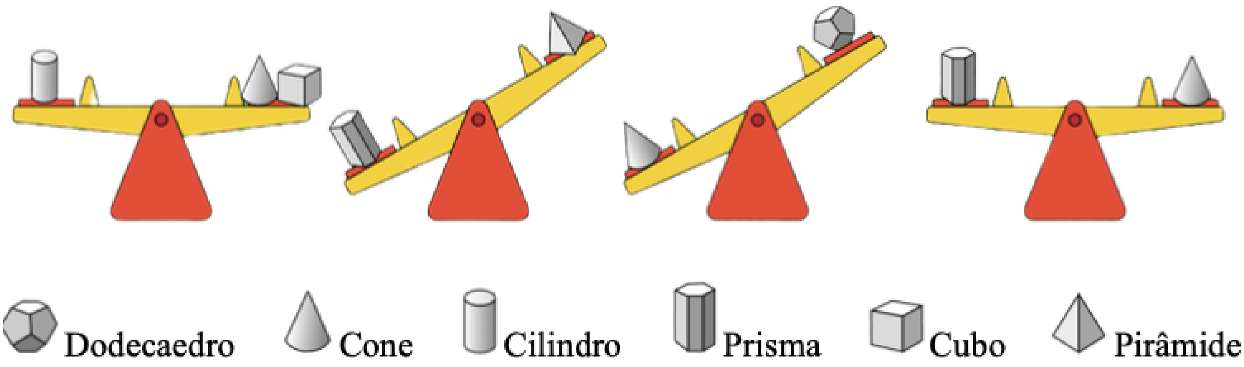
$$227{,}6 = \frac{2276}{10} = \frac{\frac{2276}{2}}{5}$$

Uma vez que para dividir por 10, basta dividir por 2 depois por 5. Segue que:

$$2255 + 25 - 2 - 2 = \div 2 = \div 5$$

é suficiente para encontrar 227,6 no visor.

3. (20 pontos) Iago possui seis sólidos geométricos e uma balança de pratos. Ele fez ao todo quatro pesagens para descobrir qual dos sólidos é o mais pesado, como na figura abaixo.



a) É possível determinar com certeza qual dos sólidos geométricos de Iago é o mais pesado? Por quê?

b) E o mais leve? Justifique.

c) Dê um exemplo com números inteiros para as massas, em gramas, de cada sólido geométrico de modo que a massa do cubo seja maior que a massa do cone e sejam mantidas as pesagens feitas por Iago.

Solução (a): A massa do cilindro (Cl) é igual a soma das massas do cone (Cn) e do cubo (Cb) pela primeira pesagem, uma vez que o cone tem a mesma massa do prisma (Pr) pela quarta pesagem e é mais pesado que a pirâmide (Pi) pela segunda pesagem, sabendo ainda que o cone é mais pesado que o dodecaedro (D) pela terceira pesagem, temos necessariamente que o sólido geométrico mais pesado é o cilindro. Ou ainda:

$$Cl = Cn + Cb \Rightarrow Cl > Cn \text{ e } Cl > Cb;$$

$$(Cn = Pr, Cn > Pi \text{ e } Cl > Cn) \Rightarrow Cl > Pr \text{ e } Cl > Pi;$$

$$Cn > D \text{ e } Cl > Cn \Rightarrow Cl > D.$$

Solução (b): Não é possível determinar com certeza qual dos sólidos geométricos é o mais leve, pois não existem pesagem suficientes para relacionar as massas do cubo, da pirâmide e do dodecaedro, podendo ser qualquer um deles.

Solução (c): $D = 1g$, $Pi = 2g$ $Cb = 30g$, $Pr = 5g$, $Cn = 5g$ e $Cl = 35g$.

4. (20 pontos) Uma sequência *arretada* é uma sequência de números naturais na qual cada número, após o segundo, é a diferença não negativa entre os dois números anteriores. Por exemplo, se uma sequência arretada começa com $16, 13$, então

   - o terceiro número na sequência é $16 - 13 = 3$,
   - o quarto número é $13 - 3 = 10$,
   - o quinto número é $10 - 3 = 7$,

   e assim por diante, resultando na sequência $\boxed{16}\boxed{13}\boxed{3}\boxed{10}\boxed{7}\cdots$

   a) Complete a sequência arretada até o décimo número:

16	13	3	10	7					

   b) Qual é o centésimo número na sequência arretada que começa com primeiro termo igual a 20 e segundo termo igual a 14?

   c) Qual é a soma dos primeiros 100 números da sequência arretada obtida do item b)?

Solução (a):

16	13	3	10	7	3	4	1	3	2

Solução (b): Escrevendo os primeiros termos da sequência, temos

20	14	6	8	2	6	4	2	2	0	2	2	0	2	2	0

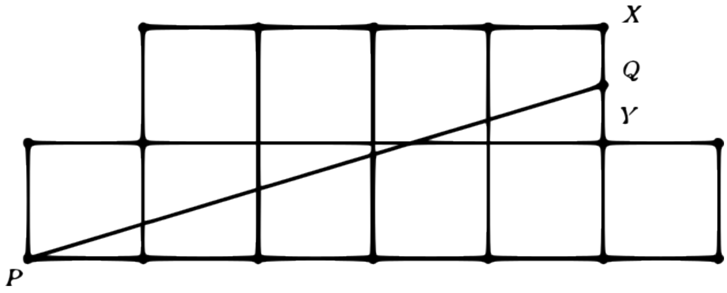
$\cdots$

Observe que após os sete primeiros termos da sequência, o bloco $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{0}$ se repetirá indefinidamente. Para chegar no centésimo termo, precisamos dos sete primeiros termos mais trinta e um blocos completos de três termos, pois $100 = 7 + 31 \times 3$. Com isso, concluímos que o centésimo termo na sequência é o número 0.

Solução (c): Para chegarmos na soma dos primeiros 100 números da sequência acima, basta somarmos os sete primeiros números com 91 vezes 4, já que 4 é a soma em cada bloco $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{0}$.
$20 + 14 + 6 + 8 + 2 + 6 + 4 + 31 \times 4 = 60 + 124 = 184$

Portanto, a soma dos primeiros 100 números da sequência do item (b) é 184.

5. (20 pontos) Uma fazenda é formada por dez quadrados iguais de lado 2, como na figura abaixo. O dono da fazenda decidiu dividir a fazenda em duas partes, e para isso colocou uma cerca (em linha reta) indo do ponto P ao ponto Q.



a) Qual a área total da fazenda?

b) Se o ponto Q for escolhido de modo que $XQ = QY = 1$, qual a área da fazenda em cada lado da cerca?

c) Se o ponto Q for escolhido de modo que a cerca PQ dividida a fazenda em duas partes iguais, encontre o valor de $\frac{XQ}{QY}$.

Solução (a): Note que a área total da fazenda é igual a 40 (basta colocar o quadrado extra da parte de baixo no quadrado que está faltando na parte de cima, formando um retângulo). Assim,

$$A_{cima} + A_{baixo} = 40.$$

Solução (b): A área de baixo é a soma da área do triângulo da parte de baixo com a área de um quadrado, logo

$$A_{baixo} = \frac{10(2+1)}{2} + 4 \implies A_{baixo} = 19.$$

Assim,

$$A_{baixo} = 19, \quad A_{cima} = 21.$$

Solução (c): Sejam $x = XQ$ e $y = QY$. Sabemos que

$$A_{cima} + A_{baixo} = 40.$$

Agora, note que a área do triângulo da parte de baixo é dada por $\frac{10(2+y)}{2}$, donde a área da parte de baixo é dada por

$$A_{baixo} = 5(2+y) + 4.$$

Por outro lado, a área da parte de cima é a área de um trapézio menos a área de um quadrado. Assim,

$$A_{cima} = \frac{(4+x)10}{2} - 4 \implies A_{cima} = 5(4+x) - 4$$

Portanto,

$$A_{cima} = A_{baixo} \implies 5(4+x) - 4 = 5(2+y) + 4 \implies 20 + 5x = 10 + 5y + 8$$

e então

$$5y - 5x = 2.$$

Como $x+y=2$, temos o sistema

Resolvendo o sistema

$$5y - 5x = 2$$
$$5x + 5y = 10$$

obtemos

$$10y = \frac{12}{10}, \quad x = \frac{8}{10}.$$

Deste modo,

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Boa prova!